ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ
И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

SÉRIE MATHÉMATIQUE

№ 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1938

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

И. М. ВИНОГРАДОВ

ОЦЕНКА НЕКОТОРЫХ СУММ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

В работе даются оценки тригонометрических сумм, зависящих от значений многочлена, аргумент которого пробегает последовательность простых чисел. Результаты настоящей работы в соединении с предыдущими дают оценку таких сумм для всех возможных случаев приближения старшего коэффициента многочлена посредством рациональной дроби.

Настоящая работа является дополнением к моим прежним работам, содержащим оценки сумм вида

$$S = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i m f(p)}, \quad f(p) = \alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p,$$

где n — постоянное и p пробегает простые числа.

Важнейшие случаи оценки суммы S, достигаемые моим методом, теперь в основном исчерпаны.

Правда, точность результатов можно еще значительно улучшить. В особенности это относится к частным случаям, например, к случаям

$$f(x) = \alpha x^2, \quad f(x) = \alpha x^n.$$

Тот же метод, очевидно, можно применять, при известных условиях, и в случае, когда $f(x)$ не является многочленом.

Оценки, получаемые в настоящей работе, зависят от характера приближения старшего коэффициента многочлена посредством рациональной дроби. Однако можно также рассматривать оценки, зависящие от других коэффициентов многочлена.

ЛЕММА 1. *Пусть n целое постоянное $\geqslant 2$, P целое $\geqslant 1$, m целое > 0,*

$$f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x,$$

$\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ вещественные,

$$\alpha_n = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad q > 0, \quad |\theta| \leqslant 1,$$

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}.$$

Тогда[1] *имеем*

$$S \ll P\left(\frac{m^2}{q}+\frac{m^2}{P}+\frac{q}{P^n}\right)^{\rho}, \quad \rho=\frac{1}{19.24n^{4}\log n}.$$

ЛЕММА 2. *Пусть n целое постоянное ≥ 2, N целое $> c_0$, где c_0 — достаточно большое постоянное > 1,*

$$\mu=\log N, \ m \text{ целое } > 0,$$

$$f(z)=\alpha_n z^n+\ldots+\alpha_1 z,$$

$\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ *вещественные,*

$$\alpha_n=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q)=1, \quad q>0, \quad |\theta| \leq 1,$$

$$0<Y_0<Y_1<N,$$

$$S=\sum_y \sum_x e^{2\pi i m f(xy)},$$

где y пробегает целые числа некоторой последовательности (y) с условием

$$Y_0<y \leq Y_1$$

и x, при данном y, пробегает целые числа некоторой последовательности (x) с условием

$$0<x \leq \frac{N}{y}.$$

Тогда[2] *имеем*

$$S \ll \left(\frac{m Y_1^n}{N^n}+\frac{m}{q}+\frac{q}{N^n}+\frac{1}{Y_0^n}\right)^{\gamma} \mu, \quad \gamma=\frac{1}{19.6n^6(\log n)^2}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть n целое постоянное ≥ 2, N целое ≥ 1, $\mu=\log N$, k целое > 0,*

$$f(x)=\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x,$$

$\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ *вещественные,*

$$\alpha_n=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q)=1, \quad q>0, \quad |\theta| \leq 1,$$

$$\min\left(q, \frac{N^n}{q}\right) \ll e^{\sqrt{\mu}},$$

$$S=\sum_{p \leq N} e^{2\pi i k f(p)},$$

где p пробегает простые числа.

Тогда имеем

$$S \ll N\left(\frac{k^2}{q}+\frac{k^2 q}{N^n}\right)^{\gamma} \mu^{\frac{3}{2}} \log \mu, \quad \gamma=\frac{1}{39.9n^6(\log n)^2}.$$

Доказательство. 1° Имеем

$$S=\sum \mu(d) S_d, \quad S_d=\sum_{0 \leq m \leq \frac{N}{d}} e^{2\pi i k f(md)},$$

---

[1] Лемма 7 моей работы «Некоторые общие леммы и их применение к оценке тригонометрических сумм» печатается в «Математическом сборнике».

[2] Лемма 8 моей работы, указанной в сноске [1] (частный случай).

где d пробегает числа последовательности (d), состоящей из делителей произведения всех простых чисел, не превосходящих $\sqrt{N}$. Отсюда

$$S = T_0 - T_1 + O(\sqrt{N}),$$

$$T_0 = \sum_{(d_0)} \sum_{m} e^{2\pi i k f(md)}, \quad T_1 = \sum_{(d_1)} \sum_{m} e^{2\pi i k f(md)},$$

где (d_0) обозначает часть последовательности (d), содержащую числа с четным числом простых сомножителей, и (d_1) обозначает часть последовательности (d), содержащую числа с нечетным числом простых сомножителей. Суммирование в обеих суммах распространяется лишь на пары значений m и d, удовлетворяющие условию

$$md \leqslant N.$$

2° Дальнейшие рассуждения будут относиться к какой-либо одной из сумм T_0 и T_1. Эту избранную сумму мы обозначим символом T_2. Соответствующую из последовательностей (d_0) и (d_1) мы обозначим символом (d_2).

3° Положим

$$e \leqslant d_0 \leqslant e^{\nu\sqrt{\mu}}, \quad \nu = \frac{1}{n}$$

оценим сначала часть T' суммы T_2, отвечающую значениям $d \leqslant d_0$. Здесь, согласно лемме 1, имеем

$$S_d \ll \frac{N}{d}\left(\frac{k^2 d^{2n}}{q} + \frac{q d^n}{N^n}\right)^{\rho},$$

откуда, суммируя на все $d < d_0$, имеем

$$T' \ll N\left(\frac{k^2 d_0^{2n}}{q} + \frac{q d_0^n}{N^n}\right)^{\rho}, \quad \rho = \frac{1}{19.24 n^3 \log n}.$$

4° Далее мы оценим часть T'' суммы T_2 с условием

$$d_0 < d \leqslant \frac{N}{d_0}.$$

Здесь имеем

$$T'' = \sum_{d_0 < d \leqslant \frac{N}{d_0}} \sum_{m} e^{2\pi i k f(dm)}$$

и, согласно лемме 2, будет

$$T'' \ll N\left(\frac{k}{d_0^n} + \frac{k}{q} + \frac{q}{N^n}\right)^{\gamma} \mu, \quad \gamma = \frac{1}{19.6 n^6 (\log n)^2}.$$

5° Остается рассмотреть часть T''' суммы T_2, отвечающую случаю $d > N d_0^{-1}$. Здесь, меняя порядок суммирования, будем иметь

$$T''' = \sum_{m} T(m), \quad T(m) = \sum_{d} e^{2\pi i k f(md)},$$

где m пробегает значения

$$m = 1, \ldots, [d_0]$$

d, при каждом данном m, пробегает значения с условием

$$\frac{N}{d_0} < d \leqslant \frac{N}{m}.$$

6° Последовательность (d_2) мы разбиваем на две последовательности: последовательность (d'') с условием, что все простые делители d будут

$$\leqslant d_0^n,$$

и последовательность (d') с условием, что по крайней мере один простой делитель d будет

$$> d_0^n.$$

Число F чисел $d \geqslant \frac{N}{d_0}$ последовательности (d'') будет

$$\ll \frac{N\mu}{m} 2^{-\sqrt{\mu}}.$$

Действительно, если такое d имеет h простых сомножителей, то

$$d_0^{nh} \geqslant \frac{N}{d_0}.$$

$$(nh+1)\nu\sqrt{\mu} \geqslant \mu, \quad h \geqslant \sqrt{\mu} - \nu.$$

Поэтому число $\tau(d)$ делителей такого d наверно будет

$$\tau(d) = 2^n > 2^{\sqrt{\mu}-\nu}.$$

Но имеем

$$\tau(1) + \ldots + \tau\left(\left[\frac{N}{m}\right]\right) < \frac{N}{m}(\mu+1).$$

Поэтому

$$F 2^{\sqrt{\mu}-\nu} < \frac{N}{m}(\mu+1), \quad F \ll \frac{N\mu}{m} 2^{-\sqrt{\mu}}.$$

7° Соответственно указанному в 6° подразделению (d_2) на (d') и (d'') имеем

$$T(m) = T'(m) + T''(m) = T'(m) + O\left(\frac{N\mu}{m} 2^{-\sqrt{\mu}}\right).$$

Но максимум числа простых сомножителей каждого d будет

$$< \mu.$$

Поэтому

$$T'(m) = \sum_{\varkappa < \mu} T_\varkappa(m),$$

где $T_\varkappa(m)$ обозначает сумму

$$T_\varkappa(m) = \sum e^{2\pi i k f(md)},$$

распространенную на числа d последовательности (d') с условием

$$\frac{N}{d_0} < d \leqslant \frac{N}{m},$$

содержащие ровно $\varkappa$ простых делителей $> d_0^n$.

8° Чтобы оценить $T_\varkappa(m)$, мы оценим более общую сумму

$$T_{\varkappa 0}(m) = \sum_u \sum_v e^{2\pi i k f(muv)},$$

где u пробегает простые $> d_0^n$, принадлежащие (d), и v, при данном u, пробегает числа с условием

$$\frac{N}{d_0 u} < v \leqslant \frac{N}{mu},$$

принадлежащие последовательности, дополняющей (d_2) до d, и содержащие ровно $\varkappa-1$ простых сомножителей $> d_0^n$. Все члены

$$e^{2\pi i k f(md)}$$

суммы $T_\varkappa(m)$ войдут и в $T_{\varkappa 0}(m)$. При этом каждый член может быть представлен в форме

$$e^{2\pi i k f(muv)}$$

$\varkappa$ различными способами. Далее в $T_{\varkappa 0}(m)$ могут входить еще и члены вида

$$e^{2\pi i k f(mp^2 v_1)}, \quad \frac{N}{d_0 p^2} \quad v_1 \leqslant \frac{N}{mp^2},$$

где p простое $> d_0^n$. Каждый такой член входит в $T_{\varkappa 0}(m)$ один раз. Число же чисел $p^2 v_1$ с условием

$$\frac{N}{d_0 p^2} < v_1 < \frac{N}{mp^2},$$

отвечающих данному p, будет

$$\ll \frac{N}{mp^2}.$$

Поэтому

$$T_{\varkappa 0}(m) = \varkappa T_\varkappa(m) + O\Bigg(\sum_{d_0^n < p \leqslant \sqrt{N}} \frac{N}{mp^2}\Bigg) = \varkappa T_\varkappa(m) + O\Big(\frac{N}{m} d_0^{-n}\Big),$$

$$T_\varkappa(m) = \frac{1}{\varkappa} T_{\varkappa 0}(m) + O\Big(\frac{N}{m\varkappa} d_0^{-n}\Big).$$

9° Но, согласно лемме 2 $\Big($здесь $\frac{N}{d_0} > \sqrt{N}$, причем сумму рассматриваем как разность двух сумм$\Big)$,

$$T_{\varkappa 0}(m) \ll \frac{N}{m}\Big(\frac{km^n(\sqrt{N})^n m^n}{N^n} + \frac{km^n}{q} + \frac{qm^n}{N^n} + \frac{1}{d_0^{n^2}}\Big)^\gamma \ll$$
$$\ll \frac{N}{m}\Big(\frac{km^n}{q} + \frac{qm^n}{N^n} + \frac{1}{d_0^{n^2}}\Big)^\gamma,$$

откуда, ввиду 8°,

$$T_\varkappa(m) \ll \frac{N}{m\varkappa}\Big(\frac{km^n}{q} + \frac{qm^n}{N^n} + \frac{1}{d_0^{n^2}}\Big)^\gamma \mu.$$

Отсюда, ввиду неравенства

$$\min\Big(q, \frac{N^n}{q}\Big) \ll e^{\sqrt{\mu}},$$

находим

$$T(m) \ll \frac{N}{m}\Big(\frac{km^n}{q} + \frac{qm^n}{N^n} + \frac{1}{d_0^{n^2}}\Big)^\gamma \mu \log \mu,$$

$$T''' \ll N\Big(\frac{kd_0^n}{q} + \frac{qd_0^n}{N^n} + \frac{1}{d_0^{n^2}}\Big)^\gamma \mu \log \mu \log d_0.$$

10° Теперь, ввиду 9°, 4°, 3°, 2° и 1°, имеем

$$S \ll N\Big(k^2 \frac{d_0^{2n}}{q} + \frac{qd_0^n}{N^n}\Big)^\rho + N\mu\Big(\frac{k}{q} + \frac{q}{N^n} + \frac{k}{d_0^n}\Big)^\gamma +$$
$$+ N\mu \log \mu \log d_0 \Big(\frac{kd_0^n}{q} + \frac{qd_0^n}{N^n} + \frac{1}{d_0^{n^2}}\Big)^\gamma,$$

$$\rho = \frac{1}{19.24 n^3 \log n}, \quad \gamma = \frac{1}{19.6 n^6 (\log n)^2},$$

или, проще,

$$S \ll N\mu \log \mu \log d_0 \left(\frac{kd_0^n}{q} + \frac{qd_0^n}{N^n} + \frac{1}{d_0^n} \right)^{\gamma} + N\mu \left(\frac{k^2 d_0^{2n}}{q} \right)^{\gamma\nu^2 \log n}.$$

11° Теперь положим

$$d_0 = \left(\frac{\min(q, N^n q^{-1})}{k^2} \right)^{\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{4n^3 \log n}}.$$

Тогда окажется $d_0 \leqslant e^{\nu\sqrt{\mu}}$, причем будем иметь

$$S \ll N\mu^{\frac{3}{2}} \log \mu \left(\frac{k^2}{q} + \frac{k^2 q}{N^n} \right)^{\delta}, \quad \delta = \frac{1}{39.9 n^6 (\log n)^2},$$

что и доказывает нашу теорему.

Замечание. Теорема 1 является дополнением к теореме 2, указанной в сноске [1] моей работы, где для случая

$$\min\left(q, \frac{N^n}{q} \right) \gg e^{\sqrt{\mu}}$$

мною была дана оценка

$$S \ll N \left(\frac{k^5}{q} + \frac{k^5}{N} + \frac{k^5 q}{N^n} \right)^{\beta} \mu^{\frac{3}{2} \log \mu},$$

$$\beta = \frac{1}{49 n^6 (\log n)^2}.$$

ЛЕММА 3. *Пусть P целое > 1, m целое > 0,*

$$f(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x, \quad S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)},$$

α_2 и α_1 вещественные,

$$\alpha_2 = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| \leqslant 1, \quad q > 1.$$

Тогда имеем

$$S \ll P \left[\left(\frac{m}{q} + \frac{m}{P} + \frac{q}{P^2} \right) \log q \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно ограничиться случаем $P \geqslant c_1$, $q \geqslant c_2$, где c_1 и c_2 — достаточно большие постоянные > Имеем

$$SS' = \sum_{x=1}^{P} \sum_{y=1}^{P} e^{2\pi i m [\alpha_2 (x^2 - y^2) + \alpha_1 (x - y)]} \ll \sum_{k=-P}^{P} \left| \sum_{y=y'}^{y''} e^{2\pi i 2m\alpha_2 k y} \right|,$$

где y' и y'' — некоторые числа с условием

$$y' \ll P, \quad y'' \ll P.$$

Отсюда находим

$$SS' \ll \sum_{k} \min\left(P, \frac{1}{(2m\alpha_2 k)} \right).$$

Но последнюю сумму можно разбить на

$$\ll \frac{mP}{q} + 1$$

сумм, каждая из которых приводится к виду

$$\Omega=\sum_{z=0}^{q'}\min\left(P,\frac{1}{(g+\alpha_2 z)}\right),\qquad 0<q'\leqslant q.$$

Находим

$$g=\frac{f}{q}+\frac{\theta'}{q},\quad \alpha_2 z=\frac{az}{q}+\frac{\theta''}{q},\quad |\theta'|<1,\quad |\theta''|\leqslant 1,$$

$$(g+\alpha_2 z)=\left(\frac{\rho+2\theta'''}{q}\right),$$

где ρ — модуль абсолютно наименьшего вычета числа $az+f$ по модулю q.

Отсюда находим

$$SS'\ll\left(\frac{mP}{q}+1\right)\left(P+\sum_{\rho>2}\frac{q}{\rho}\right)\ll P^2\left(\frac{m}{q}+\frac{m\log q}{P}+\frac{q\log q}{P^2}\right),$$

откуда и следует лемма 3.

ЛЕММА 4. *Пусть*

$$f(z)=\alpha_2 z^2+\alpha_1 z,$$

α_2 *и* α_1 *вещественные,*

$$\alpha_2=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad q>0,\quad |\theta|\leqslant 1,$$

m *целое положительное,* N *целое* $\geqslant c_0$, *где* c_0 *достаточно большое постоянное* >1, $\mu=\log N$,

$$0<Y_0<Y_1<N,$$

F_N *функция, определенная для всех целых положительных* $N\geqslant c_0$. *Далее,* $\varphi(y)$ *обозначает функцию, принимающую для всех целых* y *интервала*

$$Y_0<y\leqslant Y_1$$

неотрицательные значения. При этом, каковы бы ни были y_1 *и* y_2 *с условием*

$$Y_0\leqslant y_1<y_2\leqslant Y_1,$$

всегда имеем

$$\sum_{y_1<y\leqslant y_2}[\varphi(y)]^2\ll y_2 F_N.$$

Пусть, наконец,

$$S=\sum_y\varphi(y)\sum_x e^{2\pi i m f(xy)},$$

где y *пробегает целые числа некоторой последовательности* (y) *с условием*

$$Y_0<y\leqslant Y_1$$

и x, *при данном* y, *пробегает числа некоторой последовательности* (x) *с условием*

$$\frac{N'}{y}<x\leqslant\frac{N}{y},\quad 1<N'<N.$$

Тогда имеем

$$S \ll N\left(\frac{m}{q}+\frac{q}{N^2}+\frac{m}{Y_0}+\frac{Y_1^2}{N^2}\right)^{\frac{1}{8}} F_N^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{13}{8}}.$$

Доказательство. 1° Полагая для простоты

$$P=\left[\frac{N}{Y_0}\right]$$

и ограничиваясь пока случаем $Y_1 \leqslant 2Y_0$, имеем

$$S^2 \ll \sum_z [\varphi(z)]^2 \sum_z \sum_x \sum_{x_1} e^{2\pi i m[\alpha_2(x^2-x_1^2)z^2+\alpha_1(x-x_1)z]},$$

где z пробегает все целые числа в пределах

$$Y_0 < z \leqslant Y_1.$$

Изменяя порядок суммирования, имеем

$$S^2 \ll Y_0 F_N \Omega, \quad \Omega=\sum_x \sum_{x_1} \sum_z e^{2\pi i m[\alpha_2(x^2-x_1^2)z^2+\alpha_1(x-x_1)z]},$$

причем x и x_1 пробегают числа последовательности (x), лежащие в ряде

$$1, \ldots, P,$$

а z при каждой данной паре x и x_1 пробегает все целые числа с условием

$$\max\left(Y_0, \frac{N'}{x}, \frac{N'}{x_1}\right) < z < \min\left(Y_0, \frac{N}{x}, \frac{N}{x_1}\right).$$

2° Имеем (метод Вейля)

$$\Omega^2 \ll P^2 \sum_x \sum_{x_1} \sum_k \left|\sum_z e^{2\pi i m[\alpha_2(x^2-x_1^2)2kz]}\right| \ll$$

$$\ll P^2 \sum_x \sum_{x_1} \sum_k \min\left(Y_0, \frac{1}{(2m\alpha_2(x+x_1)(x-x_1)k)}\right).$$

Часть Ω^2, отвечающая случаю

$$(x+x_1)(x-x_1)k=0,$$

очевидно, будет

$$\ll P^4 Y_0^2\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{Y_0}\right).$$

Остается рассмотреть часть W, отвечающую случаю

$$2m(x+x_1)(x-x_1)k \gtrless 0.$$

Здесь имеем

$$2m(x+x_1)(x-x_1)k \ll mP^2 Y_0,$$

причем число $\varphi(u)$ решений уравнения

$$2m(x+x_1)(x-x_1)k=u$$

удовлетворяет условию

$$\sum_u [\varphi(u)]^2 \ll P^2 Y_0 \mu^5.$$

Поэтому найдем

$$W^2 \ll P^4 P^2 Y_0 \mu^5 \sum_u \min\left(Y_0^2, \frac{1}{(\alpha_2 u)^2}\right).$$

Но последнюю сумму можно разбить на

$$\ll \frac{mP^2Y_0}{q}+1$$

сумм, каждая из которых может быть представлена в форме

$$T=\sum_{h=1}^{q'}\min\left(Y_0^2, \frac{1}{(g+\alpha_2 h)^2}\right), \ 0<q'\leqslant q.$$

Имеем

$$g=\frac{f+\theta'}{q}, \ \alpha_2 h=\frac{ah+\theta''}{q}, \ |\theta'|\leqslant 1, \ |\theta''|\leqslant 1,$$

$$(g+\alpha_2 h)=\left(\frac{\rho+2\theta'''}{q}\right),$$

где ρ — модуль абсолютно наименьшего вычета числа $ah+f$ по модулю q.

При $Y_0<q$ имеем

$$T\ll Y_0^2 q Y_0^{-1}+\sum_{\rho>qY_0^{-1}+1}\frac{q^2}{\rho^2}\ll Y_0 q.$$

Если же $Y_0\geqslant q$, то имеем

$$T\ll Y_0^2+\sum_{\rho>2}\frac{q^2}{\rho^2}\ll Y_0^2.$$

Следовательно,

$$W^2\ll P^6 Y_0\mu^5\left(\frac{mP^2Y_0}{q}+1\right)(Y_0^2+Y_0 q)\ll P^8Y_0^4\mu^5\left(\frac{m}{q}+\frac{m}{Y_0}+\frac{q}{N^2}\right).$$

Теперь имеем

$$\Omega^2\ll P^4 Y_0^2\mu^{\frac{5}{2}}H^{\frac{1}{2}}, \ H=\left(\frac{m}{q}+\frac{q}{N^2}+\frac{m}{Y_0}+\frac{Y_0^2}{N^2}\right).$$

Отсюда

$$S^2\ll P^2Y_0^2F_N\mu^{\frac{5}{4}}H^{\frac{1}{4}}, \ S\ll NF_N^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{5}{8}}H^{\frac{1}{8}},$$

что и доказывает нашу лемму, так как в общем случае всю сумму можно разбить на $\ll\mu$ сумм рассмотренного типа.

Замечание. Из приведенного вывода следует, что оценка, указанная в лемме, может быть заменена и такою:

$$S\ll N^{1+\varepsilon}\left(\frac{m}{q}+\frac{q}{N^2}+\frac{m}{Y_0}+\frac{Y_1}{N}\right)^{\frac{1}{4}}F_N^{\frac{1}{2}},$$

где ε — произвольно малое положительное постоянное. Соответственным образом могут быть уточнены и основанные на лемме 4 оценки теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть*

$$f(x)=\alpha_2 x^2+\alpha_1 x,$$

α_2 и α_1 вещественные, p пробегает простые числа, N целое $>c_0$, где c_0 — достаточно большое постоянное >1, $\mu=\log N$,

$$\alpha_2=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}, \ (a,q)=1, \ q>0, \ |\theta|\leqslant 1,$$

k целое.

$$S = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i k f(p)},$$

где p пробегает простые числа.

Тогда имеем

$$S \ll N \left(\frac{k^4}{N} + \frac{k^4}{q} + \frac{k^4 q}{N^2} \right)^{\frac{1}{32}} \mu^{\frac{7}{2} \log \mu}.$$

Если же сверх того

$$\min(q, N^2 q^{-1}) \ll e^{\sqrt{\mu}},$$

то имеем также

$$S \ll N \left(\frac{k^3}{q} + \frac{k^3 q}{N^2} \right)^{\frac{1}{24}} \mu^2.$$

Доказательство. 1° Имеем

$$S = \sum \mu(d) S_d + O(\sqrt{N}), \quad S_d = \sum_{0 < m \leq \frac{N}{d}} e^{2\pi i k f(dm)},$$

где d пробегает числа последовательности (d), состоящей из делителей произведения всех простых чисел, не превосходящих $\sqrt{N}$. Отсюда находим

$$S = T_0 - T_1 + O(\sqrt{N}),$$

$$T_0 = \sum_{(d_0)} \sum_{m} e^{2\pi i k f(dm)}, \quad T_1 = \sum_{(d_1)} \sum_{m} e^{2\pi i k f(dm)},$$

где (d_0) обозначает часть (d), содержащую числа с четным числом простых делителей, и (d_1) обозначает часть (d), содержащую числа с нечетным числом простых делителей, причем суммирование распространяется лишь на пары значений d и m, удовлетворяющие условию

$$dm \leq N.$$

2° Дальнейшие рассуждения будут относиться к какой-либо одной из сумм T_0 и T_1. Эту сумму мы обозначим символом T_2, а соответствующую из последовательностей (d_0) и (d_1) обозначим символом (d_2).

3° Мы оценим сначала часть T' суммы T_2, отвечающую случаям

$$m > \frac{N}{d_0}, \quad d_0 = [\min(N, q, N^2 q^{-1})]^{\frac{1}{4}}.$$

Очевидно,

$$T' = \sum_{0 < d \leq d_0} S', \quad S' = \sum_{\frac{N}{d_0} < m \leq \frac{N}{d}} e^{2\pi i k f(dm)}.$$

К сумме S' можно применить лемму 3. Получим

$$S' \ll \frac{N}{d} \left(\frac{kd^2}{q} + \frac{kd^3}{N} + \frac{d^2 q}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}}.$$

Вместе с тем окажется

$$T' \ll N\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{kd_0^2}{q}+\frac{kd_0^3}{N}+\frac{d_0^2q}{N^2}\right)^{\frac{1}{2}} \ll N\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{k^4}{q}+\frac{k^4}{N}+\frac{k^4q}{N^2}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

4° Далее мы рассмотрим часть T'' суммы T_2, отвечающую случаям

$$d_0 < m \leqslant \frac{N}{d_0}.$$

Здесь мы можем непосредственно применить лемму 4 (беря в ней k вместо m). Очевидно, за y следует взять переменное m, а за x следует взять переменное d. Получим

$$T'' \ll N\left(\frac{k}{q}+\frac{k}{d_0}+\frac{q}{N^2}\right)^{\frac{1}{8}}\mu^{\frac{13}{8}} \ll N\left(\frac{k^4}{N}+\frac{k^4}{q}+\frac{k^4q}{N^2}\right)^{\frac{1}{32}}\mu^{\frac{13}{8}}.$$

5° Все значения m оставшейся части T''' суммы T_2 можно разбить на

$$\ll \mu$$

групп, каждая из которых содержит все целые числа интервала, имеющего вид

$$M \leqslant m < M', \ 1 \leqslant M < N, \ M' \leqslant 2M,$$

где, очевидно, имеем

$$M \leqslant d_0,$$

и мы рассмотрим в дальнейшем лишь часть $T_{(M)}$ суммы T_2, отвечающую значениям m выбранной группы.

6° Все простые числа $\leqslant \sqrt{N}$ мы разобьем на группы следующим образом. Пусть

$$h = \frac{4}{3}, \ \lambda = \frac{1}{4}$$

и пусть τ обозначает наибольшее целое с условием

$$2^{h^{s-1}} \leqslant \sqrt{N}.$$

Тогда мы получим τ групп чисел p, если включим в s-ую группу $(s=1, \ldots, \tau)$ числа p с условием

$$2^{h^{s-1}} \leqslant p < 2^{h^s}.$$

Из определения τ следует

$$\tau \ll \frac{\log \mu}{\log h}.$$

7° Число σ простых делителей какого-либо $d \leqslant N$ удовлетворяет условию

$$\sigma < \mu.$$

8° Все произведения d мы разобьем на классы, относя к одному и тому же классу произведения с равными числами сомножителей, принадлежащих одним и тем же группам. В виду 6° и 7° число D всех таких классов будет

$$D \ll \mu^{\frac{\log \mu}{\log h}}.$$

9° Мы оценим теперь часть $T'_{(M)}$ суммы $T_{(M)}$, отвечающую какому-либо определенному классу значений d. Пусть f_s есть произведение простых сомножителей числа d избранного класса, принадлежащих s-ой группе, и l_s число таких простых сомножителей ($f_s = 1$, $l_s = 0$, если таких сомножителей нет).

Имеем

$$d = f_1 \ldots f_\tau.$$

Полагая

$$\varphi_s = 2^{h^{s-1} l_s}, \ F_s = 2^{h^s l_s},$$

имеем

$$\varphi_s \leqslant f_s < F_s.$$

Те же самые числа

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_\tau,$$
$$f_1, \ldots, f_\tau,$$
$$F_1, \ldots, F_\tau,$$

но переставленные одновременно в таком порядке, чтобы F_s шли, не возрастая, мы обозначим символами

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_\tau,$$
$$g_1, \ldots, g_\tau,$$
$$G_1, \ldots, G_\tau.$$

Соответственно этому мы изменим и номера групп чисел p. Тогда будем иметь

$$d = g_1 \ldots g_\tau, \ \gamma_s \leqslant g_s \quad G_s, \ G_1 \geqslant G_2 \geqslant \ldots \geqslant G_\tau.$$

10° Теперь оценим часть $T'_{(M)}$ суммы $T_{(M)}$, отвечающую выбранному классу значений d. Имеем

$$M \leqslant d_0 \ll N^{\frac{1}{4}}.$$

И если также имеем

$$G_1 \ldots G_\tau \quad N^{\frac{1}{3}},$$

то наверно для всех пар значений m и d будет

$$md \ll N^{\frac{3}{5}}.$$

Следовательно,

$$T'_{(M)} \quad N^{\frac{4}{5}}.$$

Значит, остается рассмотреть лишь случай

$$G_1 \ldots G_\tau \quad N^{\frac{1}{3}}.$$

Пусть β обозначает первое число ряда $1, \ldots, \tau$ с условием

$$G_1 \ldots G_\beta \quad N^{\frac{1}{3}} M^{-1}.$$

11° Предположим, что $\beta \quad 1$. Тогда, полагая

$$u = mg_1 \ldots g_\beta, \ v = g_{\beta+1} \ldots g_\tau.$$

имеем

$$G_1 \ldots G_{\beta-1} \leqslant N^{\frac{1}{3}} M^{-1}, \quad G_\beta \leqslant N^{\frac{1}{3}} M^{-1},$$

$$mG_1 \ldots G_\beta \leqslant N^{\frac{2}{3}}, \quad N^\lambda < u < N^{1-\lambda}.$$

Сумму $T'_{(M)}$ мы можем представить в форме

$$T'_{(M)} = \sum_u \sum_v e^{2\pi i k f(muv)},$$

где v, при каждом u, пробегает числа с условием

$$0 < v \leqslant \frac{N}{um}.$$

Пусть $\varphi(y)$ обозначает число решений уравнения

$$mu = y.$$

Тогда

$$\varphi(y) \leqslant \tau(y).$$

Вместе с тем имеем

$$T'_{(M)} \ll \sum_y \varphi(y) \sum_v e^{2\pi i k f(yv)}.$$

Здесь мы можем применить лемму 4. При этом имеем

$$F_N^{\frac{1}{2}} \ll \mu^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому

$$T'_{(M)} \ll N\left(kN^{-\lambda} + \frac{k}{q} + \frac{q}{N^2}\right)^{\frac{1}{8}} \mu^{\frac{25}{8}}.$$

12° Наконец, рассмотрим случай

$$\beta = 1.$$

Тогда, полагая для краткости $l_1 = \varkappa$ и обозначая символом $\varkappa_1$ наименьшее целое с условием

$$G_1^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}} \geqslant N^{\frac{1}{3}} M^{-1},$$

мы представим каждое d в форме

$$d = uv,$$

где u является произведением $\varkappa_1$ простых сомножителей числа g_1, а v является произведением $\varkappa - \varkappa_1$ оставшихся сомножителей числа g_1. Легко видеть, что таким путем мы можем разбить d на два сомножителя

$$G_\varkappa^{\varkappa_1} \geqslant 1$$

различными способами. Отсюда заключаем, что

$$T'_{(M)} = \frac{1}{G_\varkappa^{\varkappa_1}} \Omega, \quad \Omega = \sum_m \sum_u \sum_v e^{2\pi i k f(muv)},$$

где m, u, v пробегают числа с условием

$$muv \leqslant N, \qquad (u, v) = 1.$$

Очевидно,

$$N^{\lambda} \ll mu.$$

При $\varkappa_1=1$ имеем также

$$mu \leqslant N^{\frac{1}{4}}\sqrt{N}=N^{\frac{3}{4}}.$$

Если же $\varkappa_1>1$, то

$$G_1^{\frac{\varkappa_1-1}{\varkappa}} \leqslant N^{\frac{1}{3}}M^{-1},\ mu \ll MG^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}} \ll N^{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, как в случае $\varkappa_1=1$, так и в случае $\varkappa_1>1$, имеем

$$N^{\lambda} \ll mu \ll N^{1-\lambda}.$$

13° Имеем

$$\Omega=\sum_{\delta}\mu(\delta)\,\Omega_{\delta},\quad \Omega_{\delta}=\sum_{m}\sum_{u'}\sum_{v'}e^{2\pi i k f(m\delta^2 u'v')},$$

где δ пробегает все возможные произведения простых чисел 1-ой группы и u' и v', при каждом данном δ, пробегают частные от деления на δ чисел u и v, одновременно кратных δ.

Оценим одну из сумм Ω_{δ}. Число решений уравнения

$$mu'=y$$

будет

$$\varphi(y)\leqslant\tau(y).$$

Поэтому

$$\Omega_{\delta}=\sum_{y}\varphi(y)\sum_{v'}e^{2\pi i k f(\delta^2 y v')},$$

где y пробегает значения с условием

$$\frac{N^{\lambda}}{\delta} \ll y \ll \frac{N^{1-\lambda}}{\delta}$$

и v', при каждом данном y, пробегает значения с условием

$$0 < v' \leqslant \frac{N}{\delta^2 y}.$$

Здесь применим лемму 4, взяв

$$\frac{N}{\delta^2}\ \text{вместо}\ N.$$

Тогда будем иметь

$$1 < \frac{N^{\lambda}}{\delta} < \frac{N^{1-\lambda}}{\delta} < \frac{N}{\delta^2},$$

если только

$$\delta < \delta_1 = N^{\lambda}.$$

Поэтому при $\delta < \delta_1$ находим

$$\Omega_{\delta} \ll \frac{N}{\delta^2}\left(\frac{k\delta^4\delta}{N^{\lambda}}+\frac{k\delta^4}{q}+\frac{q\delta^4}{N^2}\right)^{\frac{1}{8}}\mu^{\frac{25}{8}},$$

или

$$\Omega_{\delta} \ll \frac{N}{\delta^{\frac{5}{4}}}\left(kN^{-\lambda}+\frac{k}{q}+\frac{q}{N^2}\right)^{\frac{1}{8}}\mu^{\frac{25}{8}}.$$

При $\delta > \delta_1$ та же самая оценка также верна, так как тогда

$$\Omega_\delta \ll \sum_{y \ll N} \varphi(y) \frac{N}{\delta^2 y} \ll \frac{N}{\delta^2} \mu^2.$$

Следовательно,

$$\Omega \ll N \left(kN^{-\frac{1}{4}} + \frac{k}{q} + \frac{q}{N^2} \right)^{\frac{1}{8}} \mu^{\frac{25}{8}},$$

откуда

$$T'_{(M)} \ll N \left(kN^{-\frac{1}{4}} + \frac{k}{q} + \frac{q}{N^2} \right)^{\frac{1}{8}} \mu^{\frac{25}{8}}.$$

14° Теперь имеем

$$T_{(M)} \ll N \left(kN^{-\frac{1}{4}} + \frac{k}{q} + \frac{q}{N^2} \right)^{\frac{1}{8}} \mu^{\frac{25}{8} + \frac{\log \mu}{\log h}},$$

$$T''' \ll N \left(kN^{-\frac{1}{4}} + \frac{k}{q} + \frac{q}{N^2} \right) \mu^{\frac{7}{2} \log \mu}.$$

15° В виду

$$T_2 = T' + T'' + T'''$$

имеем

$$T_2 \ll N \left(\frac{k^4}{N} + \frac{k^4}{q} + \frac{k^4 q}{N^2} \right)^{\frac{1}{32}} \mu^{\frac{7}{2} \log \mu},$$

откуда и выводим первую часть теоремы.

Теперь докажем вторую часть нашей теоремы. Здесь мы почти полностью будем повторять рассуждения доказательства теоремы 1.

1° Имеем

$$S = \sum \mu(d) S_d + O(\sqrt{N}), \quad S_d = \sum_{0 < m \leqslant \frac{N}{d}} e^{2\pi i k f(md)},$$

где d пробегает числа последовательности (d), состоящей из делителей произведения всех простых чисел $\leqslant \sqrt{N}$. Отсюда

$$S = T_0 - T_1 + O(\sqrt{N}),$$

где T_0 и T_1 имеют значения, указанные в доказательстве первой части нашей теоремы. Сохраняя за символом T_2 прежнее значение, возьмем d_0 с условием

$$e \leqslant d_0 \leqslant e^{\frac{1}{4}\sqrt{\mu}}.$$

Оценим часть T' суммы T_2, отвечающую значениям $d \leqslant d_0$. Здесь согласно лемме 3 имеем

$$S_d \ll \frac{N}{d} \left[\left(\frac{kd^2}{q} + \frac{qd^2}{N^2} \right) \mu \right]^{\frac{1}{2}},$$

откуда, суммируя на все $d \leqslant d_0$, имеем

$$T' \ll N \mu^{\frac{1}{2}} \left(\frac{kd_0^2}{q} + \frac{qd_0^2}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2° Далее мы оценим часть T'' суммы T_2 с условием

$$d_0 < d \leqslant \frac{N}{d_0}.$$

Здесь имеем

$$T'' = \sum_{d_0 < d \leqslant \frac{N}{d_0}} \sum_{0 < m < \frac{N}{d}} e^{2\pi i k f(dm)}$$

и, согласно лемме 4, будем иметь

$$T'' \ll N\left(\frac{k}{d_0} + \frac{k}{q} + \frac{q}{N^2}\right)^{\frac{1}{8}} \mu^{\frac{13}{8}}.$$

3° Остается рассмотреть часть T''' суммы T_2, отвечающую случаю $d > Nd_0^{-1}$. Здесь, меняя порядок суммирования, будем иметь

$$T''' = \sum_m T(m),\ T(m) = \sum_d e^{2\pi i k f(md)},$$

где m пробегает значения

$$m = 1, \ldots, [d_0]$$

и d, при каждом данном m, пробегает значения с условием

$$\frac{N}{d_0} < d \leqslant \frac{N}{m}.$$

Последовательность (d_2) мы разобьем на две последовательности: последовательность (d''), с условием, что наибольший простой делитель будет $\leqslant d_0^4$, и последовательность (d'), с условием, что наибольший простой делитель будет $> d_0^4$. Число F чисел $d \geqslant \frac{N}{d_0}$ последовательности (d'') будет

$$F \ll \frac{N}{m} \mu 2^{-\sqrt{\mu}}.$$

Соответственно указанному подразделению имеем

$$T(m) = T'(m) + T''(m).$$

Максимум числа сомножителей каждого d будет

$$< \mu.$$

В виду всего доказанного имеем

$$T(m) = T'(m) + O\left(\frac{N\mu}{m} 2^{-\sqrt{\mu}}\right),$$

$$T'(m) = \sum_{\varkappa < \mu} T_\varkappa(m),$$

где $T_\varkappa(m)$ обозначает сумму

$$T_\varkappa(m) = \sum e^{2\pi i k f(md)},$$

содержащую слагаемые суммы $T'(m)$, имеющие ровно $\varkappa$ простых делителей $> d_0^4$.

4° Чтобы оценить $T_\varkappa(m)$, оценим более общую сумму

$$T_{\varkappa 0}(m) = \sum_u \sum_v e^{2\pi i k f(muv)},$$

где u пробегает простые $> d_0^4$, принадлежащие (d), и v, при данном u, пробегает числа с условием

$$\frac{N}{d_0 u} < v \leqslant \frac{N}{mu},$$

принадлежащие последовательности, дополняющей (d_2) до (d) и содержащие ровно $\varkappa - 1$ простых сомножителей $> d_0^4$.

Здесь опять находим

$$T_\varkappa(m) = \frac{1}{\varkappa} T_{\varkappa 0}(m) + O\left(\frac{N}{m\varkappa} d_0^{-4}\right).$$

Но, согласно лемме 4, имеем

$$T_{\varkappa 0}(m) \ll \frac{N}{m}\left(\frac{km^2}{q} + \frac{qm^2}{N^2} + \frac{km^2}{d_0^4}\right)^{\frac{1}{8}} \mu^{\frac{13}{4}}.$$

Вместе с тем находим

$$T_\varkappa(m) \ll \frac{N}{m\varkappa}\left(\frac{km^2}{q} + \frac{qm^2}{N^2} + \frac{km^2}{d_0^4}\right)^{\frac{1}{8}} \mu^{\frac{13}{8}}.$$

Отсюда, в виду неравенства

$$\min\left(q, \frac{N^2}{q}\right) \ll e^{\sqrt{\mu}},$$

находим

$$T(m) \ll \frac{N}{m}\left(\frac{km^2}{q} + \frac{qm^2}{N^2} + \frac{km^2}{d_0^4}\right)^{\frac{1}{8}} \mu^{\frac{7}{4}},$$

$$T''' \ll N\left(\frac{kd_0^2}{q} + \frac{qd_0^2}{N^2} + \frac{k}{d_0^2}\right)^{\frac{1}{8}} \mu^{\frac{7}{4}}.$$

Теперь имеем

$$T_2 = T' + T'' + T''' \ll N\mu^{\frac{1}{2}}\left(\frac{kd_0^2}{q} + \frac{qd_0^2}{N^2}\right)^{\frac{1}{2}} + N\left(\frac{k}{d_0} + \frac{k}{q} + \frac{q}{N^2}\right)^{\frac{1}{8}} \mu^{\frac{13}{8}} +$$

$$+ N\left(\frac{kd_0^2}{q} + \frac{qd_0^2}{N^2} + \frac{k}{d_0^2}\right)^{\frac{1}{8}} \mu^{\frac{7}{4}} \ll N\left(\frac{kd_0^2}{q} + \frac{k}{d_0} + \frac{qd_0^2}{N^2}\right)^{\frac{1}{8}} \mu^{\frac{7}{4}}.$$

Но положим теперь

$$d_0 = \left[\min\left(q, \frac{N^2}{q}\right)\right]^{\frac{1}{3}},$$

тогда будем иметь

$$T_2 \ll N\left(\frac{k^3}{q} + \frac{k^3 q}{N^2}\right)^{\frac{1}{24}} \mu^2,$$

откуда и выводим вторую часть теоремы.

З а м е ч а н и е. Все оценки, выведенные мною для сумм вида

$$S = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i k f(x)}, \quad f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x, \quad n > 1,$$

зависят только от N, k и α_n.

Отсюда нетрудно заключить, что те же самые оценки пригодны и в случае, когда p пробегает числа арифметической прогрессии

$$p = rx + s, \quad (r, s) = 1, \quad r > 0, \quad 0 \leqslant s < r.$$

Действительно, пусть для суммы S (при любых вещественных $\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$) имеет место оценка

$$S \ll \Delta.$$

Тогда имеем

$$\sum_{\substack{p \leqslant N \\ p = rx+s}} e^{2\pi i k f(p)} = \frac{1}{r} \sum_{h=1}^{r} \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \left[k f(p) + \frac{h}{r} p - \frac{h}{r} s \right]} \ll \Delta.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
20.VI.1938.

I. M. VINOGRADOW. ESTIMATION OF CERTAIN SUMS CONTAINING PRIMES

SUMMARY

In the present paper I prove the following theorems:

THEOREM 1. *Let n be a constant integer > 2, N an integer > 1, $\mu = \log N$, k a positive integer,*

$$f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x,$$

$$\alpha_n, \ldots, \alpha_1 \text{ are real},$$

$$\alpha_n = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \ (a, q) = 1, \ q > 0, \ |\theta| \leqslant 1,$$

$$\min\left(q, \frac{N^n}{q}\right) \ll e^{\sqrt{\mu}},$$

$$S = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i k f(p)},$$

where p runs over primes.

Then we have

$$S \ll N\left(\frac{k^2}{q} + \frac{k^2 q}{N^2}\right)^{\gamma} \mu^{\frac{3}{2}} \log \mu, \quad \gamma = \frac{1}{39.9 n^6 (\log n)^2}.$$

THEOREM 2. *Let N be an integer > 1, $\mu = \log N$, k a positive integer,*

$$f(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x,$$

$$\alpha_2, \alpha_1 \text{ are real},$$

$$\alpha_2 = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \ (a, q) = 1, \ q > 0, \ |\theta| \leqslant 1,$$

$$S = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i k f(p)},$$

where p runs over primes.

Then we have

$$S \ll N\left(\frac{k^4}{N} + \frac{k^4}{q} + \frac{k^4 q}{N^2}\right)^{\frac{1}{32}} \mu^{\frac{7}{2}} \log \mu$$

And if

$$\min(q, N^2 q^{-1}) \ll e^{\sqrt{\mu}},$$

then we have also

$$S \ll N\left(\frac{k^3}{q} + \frac{k^3 q}{N^2}\right)^{\frac{1}{24}} \mu^2.$$

Remarque. The estimations of theorems 1 and 2 are true also in the case, when p runs over primes of any arithmetical progression.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Н. С. КОШЛЯКОВ

О НЕКОТОРЫХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛАХ, СОДЕРЖАЩИХ БЕССЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Предметом настоящей заметки является вывод некоторых интегралов, зависящих от цилиндрических функций $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, $K_\nu(x)$

1. В предлагаемой статье мы выведем некоторые определенные интегралы, содержащие функции Hardy

$$L_\nu(x) = -\frac{2}{\pi} K_\nu(x) - Y_\nu(x), \tag{1}$$

$$M_\nu(x) = \frac{2}{\pi} K_\nu(x) - Y_\nu(x), \tag{2}$$

где через $Y_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ обозначены цилиндрические функции.

Для вывода первого из этих интегралов, содержащего функцию $M_\nu(x)$, возьмем интеграл Hardy

$$\int_0^\infty tJ_\nu(tv)\, Y_\nu\left(\frac{x}{v}\right) dv = -M_{2\nu}(2\sqrt{xt}), \quad -\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}, \tag{3}$$

где $x > 0$ и $t > 0$, умножим на $K_\nu(t)$ и проинтегрируем по t в пределах от $t=0$ до $t=\infty$. Тогда получим

$$\int_0^\infty K_\nu(t)\, M_{2\nu}(2\sqrt{xt})\, dt = -\int_0^\infty \frac{Y_\nu(xu)\, u^{-\nu}\, du}{u^2+1}. \tag{4}$$

Аналогичным образом из интеграла Hardy

$$\int_0^\infty tJ_\nu(tv)\, J_\nu\left(\frac{x}{v}\right) dv = J_{2\nu}(2\sqrt{xt}), \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{5}$$

найдем, что

$$\int_0^\infty K_\nu(t)\, J_{2\nu}(2\sqrt{xt})\, dt = \int_0^\infty \frac{J_\nu(xu)\, u^{-\nu}\, du}{u^2+1}. \tag{6}$$

Но

$$\int_0^\infty \left\{\sin\nu\pi\, J_\nu(xu) + \cos\nu\pi\, Y_\nu(xu)\right\} \frac{u^{-\nu}du}{u^2+1} = -K_\nu(x) \tag{7}$$

и мы получаем следующий результат:

$$\int_0^\infty K_\nu(t)\left\{\cos\nu\pi\ M_{2\nu}(2\sqrt{xt})-\sin\nu\pi\ J_{2\nu}(2\sqrt{xt})\right\}dt=K_\nu(x), \tag{8}$$

где $-\frac{1}{2}<\nu<\frac{1}{2}$.

Если теперь рассмотреть интеграл

$$\int_0^\infty tY_\nu(tv)\,J_\nu\left(\frac{x}{v}\right)dv=-L_{2\nu}(2\sqrt{xt}), \tag{9}$$

где $-\frac{1}{2}<\nu<\frac{1}{2}$, $x>0$, $t>0$, то получим

$$\int_0^\infty tK_\nu(t)\ L_{2\nu}(2\sqrt{xt})\ dt=-x\int_0^\infty\frac{Y_\nu(xu)\,u^{2-\nu}\,du}{u^2+1}, \tag{10}$$

а так как

$$\int_0^\infty tK_\nu(t)\,J_{2\nu}(2\sqrt{xt})\,dt=x\int_0^\infty\frac{J_\nu(xu)\,u^{2-\nu}\,du}{u^2+1}, \tag{11}$$

то в результате применения формулы

$$\int_0^\infty\left\{\sin\nu\pi\ J_\nu(xu)+\cos\nu\pi\ Y_\nu(xu)\right\}\frac{u^{2-\nu}\,du}{u^2+1}=K_\nu(x) \tag{12}$$

получится следующий результат:

$$\int_0^\infty tK_\nu(t)\left\{\sin\nu\pi\ J_{2\nu}(2\sqrt{xt})-\cos\nu\pi\ L_{2\nu}(2\sqrt{xt})\right\}dt=xK_\nu(x), \tag{13}$$

где $-\frac{1}{2}<\nu<\frac{1}{2}$.

Рассуждая аналогичным образом, можно доказать, что

$$\int_0^\infty J_\nu(t)\left\{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}K_{2\nu}(2\varepsilon\sqrt{xt})+e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}K_{2\nu}(2\bar{\varepsilon}\sqrt{xt})\right\}dt=K_\nu(x), \tag{14}$$

где $\varepsilon=\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$, $\bar{\varepsilon}=\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)$; $\nu>-\frac{1}{2}$.

Наконец, если рассмотреть интеграл

$$\int_0^\infty\left\{\sin\nu\pi\ J_\nu(2\sqrt{xt})+\cos\nu\pi\ Y_\nu(2\sqrt{xt})\right\}\frac{u^{2\mu+\nu}\,du}{(u^2+1)^{\mu+\nu+1}},$$

в котором $\mu>-\frac{1}{2}$, $\nu>-\frac{5}{2}$, то нетрудно доказать следующую формулу:

$$\int_0^\infty K_\mu(t)\,t^{\mu+\nu}\left\{\cos\nu\pi\ M_{2\nu}(2\sqrt{xt})-\sin\nu\pi\ J_{2\nu}(2\sqrt{xt})\right\}dt=$$

$$=\frac{2^{\mu+\nu-1}}{\sin\nu\pi}\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\,{}_1F_2\left(\mu+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\nu,\ 1-\nu;\frac{x^2}{4}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\frac{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,{}_1F_2\left(\mu+\nu+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2},\ 1+\nu,\ \frac{x^2}{4}\right)\right\}, \tag{15}$$

где $\mu > -\frac{1}{2}$ и $\nu > -\frac{1}{2} + |\mu|$.

2. Выведем еще некоторые интегралы с помощью метода, примененного Dixon'ом и Ferrar'ом.

Пусть a и z обозначают положительные числа. Принимая во внимание асимптотическую формулу для функции $K_\nu(x)$, по теореме Коши найдем, что

$$\int_0^\infty \left\{ K_\nu(at) + e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} K_\nu(-iat) \right\} (z^2 - it^2)^\mu t^{\nu+1}\, dt =$$

$$= -\int_0^\infty \left\{ K_\nu(at) + e^{\frac{\nu\pi i}{2}} K_\nu(iat) \right\} (z^2 + it^2)^\mu t^{\nu+1}\, dt, \tag{16}$$

где $\mu < -\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$, $\nu > -1$.

Пользуясь теперь формулами

$$K_\nu(at) + e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} K_\nu(-iat) = \frac{\pi}{2} \left\{ M_\nu(at) + iJ_\nu(at) \right\}, \tag{17}$$

$$K_\nu(at) + e^{\frac{\nu\pi i}{2}} K_\nu(iat) = \frac{\pi}{2} \left\{ M_\nu(at) - iJ_\nu(at) \right\}, \tag{18}$$

найдем, что

$$\int_0^\infty \left\{ M_\nu(at) + iJ_\nu(at) \right\} (z^2 - it^2)^\mu t^{\nu+1}\, dt =$$

$$= -\int_0^\infty \left\{ M_\nu(at) - iJ_\nu(at) \right\} (z^2 + it^2)^\mu t^{\nu+1}\, dt$$

и следовательно,

$$\int_0^\infty \left\{ M_\nu(at) + iJ_\nu(at) \right\} \left\{ (z^2 + it^2)^\mu + (z^2 - it^2)^\mu \right\} t^{\nu+1}\, dt =$$

$$= 2i \int_0^\infty J_\nu(at)\, (z^2 + it^2)^\mu t^{\nu+1}\, dt = \frac{2^{\mu+2} z^{\mu+\nu+1}}{a^{\mu+1}\Gamma(-\mu)}\, \varepsilon^{\mu-\nu+1} K_{\mu+\nu+1}(a\bar{\varepsilon}z). \tag{19}$$

Отсюда вытекает следующий результат:

$$\int_0^\infty M_\nu(at) \left\{ (z^2 + it^2)^\mu + (z^2 - it^2)^\mu \right\} t^{\nu+1}\, dt =$$

$$= \left(\frac{2}{a}\right)^{\mu+1} \frac{z^{\mu+\nu+1}}{\Gamma(-\mu)} \left\{ \varepsilon^{\nu-\mu-1} K_{\mu+\nu+1}(a\varepsilon z) + \bar{\varepsilon}^{\nu-\mu-1} K_{\mu+\nu+1}(a\bar{\varepsilon}z) \right., \tag{20}$$

где $\varepsilon = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$, $\bar{\varepsilon} = \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)$; $\nu > -1$, $\mu < -\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$.

В частности, полагая $\mu = -1$, найдем, что

$$\int_0^\infty \frac{M_{2\nu}(2\sqrt{at})\, t^\nu\, dt}{t^2 + x^2} = x^{\nu-1} \left\{ e^{\frac{\nu\pi i}{2}} K_{2\nu}(2\varepsilon\sqrt{ax}) + e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} K_{2\nu}(2\bar{\varepsilon}\sqrt{ax}) \right\}, \tag{21}$$

где $-1 < \nu < \frac{3}{2}$.

Применяя тот же самый метод, докажем, что

$$\int_0^\infty L_\nu(at)\left\{(z^2+it^2)^\mu-(z^2-it^2)^\mu\right\}t^{\nu+1}\,dt=$$

$$=\left(\frac{2}{a}\right)^{\mu+1}\frac{z^{\mu+\nu+1}}{\Gamma(-\mu)}\left\{\bar{\varepsilon}^{\nu-\mu-1}K_{\mu+\nu+1}(a\bar{\varepsilon}z)-\varepsilon^{\nu-\mu-1}K_{\mu+\nu+1}(a\varepsilon z)\right\}, \qquad (22)$$

где $\nu>-1$, $\mu<-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}$.

Как частный случай отметим формулу

$$\int_0^\infty \frac{L_{2\nu}(2\sqrt{at})\,t^{\nu+1}\,dt}{t^2+x^2}=ix^\nu\left\{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}K_{2\nu}(2\bar{\varepsilon}\sqrt{ax})-e^{\frac{\nu\pi i}{2}}K_{2\nu}(2\varepsilon\sqrt{ax})\right\}, \qquad (23)$$

где $-1<\nu<\frac{3}{2}$.

Если* воспользоваться известной формулой

$$\int_0^\infty J_\nu(at)\frac{K_\mu(b\sqrt{t^2+z^2})}{(t^2+z^2)^{\frac{\mu}{2}}}t^{\nu+1}dt=$$

$$=\frac{a^\nu}{b^\mu}\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{z}\right\}^{\mu-\nu-1}K_{\mu-\nu-1}(z\sqrt{a^2+b^2}),$$

то, применяя тот же метод доказательства, найдем следующие формулы:

$$\int_0^\infty M_\nu(at)\left\{\frac{K_\mu(a\sqrt{z^2+it^2})}{(z^2+it^2)^{\frac{\mu}{2}}}+\frac{K_\mu(a\sqrt{z^2-it^2})}{(z^2-it^2)^{\frac{\mu}{2}}}\right\}t^{\nu+1}\,dt=$$

$$=\frac{z^{1+\nu-\mu}a^\nu}{b^\mu}\left\{\bar{\varepsilon}^{\mu+\nu-1}\frac{K_{1+\nu-\mu}(\bar{\varepsilon}x\sqrt{a^2+ib^2})}{(a^2+ib^2)^{\frac{1+\nu-\mu}{2}}}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{\mu+\nu-1}\frac{K_{1+\nu-\mu}(\varepsilon x\sqrt{a^2-ib^2})}{(a^2-ib^2)^{\frac{1+\nu-\mu}{2}}}\right\}, \quad \nu>-1 \qquad (24)$$

и

$$\int_0^\infty L_\nu(at)\left\{\frac{K_\mu(a\sqrt{z^2+it^2})}{(z^2+it^2)^{\frac{\mu}{2}}}-\frac{K_\mu(a\sqrt{z^2-it^2})}{(z^2-it^2)^{\frac{\mu}{2}}}\right\}t^{\nu+1}\,dt=$$

$$=\frac{z^{1+\nu-\mu}a^\nu}{b^\mu}\left\{\bar{\varepsilon}^{\mu+\nu-1}\frac{K_{1+\nu-\mu}(\bar{\varepsilon}x\sqrt{a^2+ib^2})}{(a^2+ib^2)^{\frac{1+\nu-\mu}{2}}}-\right.$$

$$\left.-\varepsilon^{\mu+\nu-1}\frac{K_{1+\nu-\mu}(\varepsilon x\sqrt{a^2-ib^2})}{(a^2-ib^2)^{\frac{1+\nu-\mu}{2}}}\right\}, \quad \nu>-1. \qquad (25)$$

Математический институт
при Ленинградском гос. университете.

Поступило
13. V. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy G., Messenger of Math., 1927.
[2] Dixon A. L. and Ferrar W. L., Quarterly Journal of Math., Oxford, 7, 26, 1395.
[3] Koshliakov N., Messenger of Math., 1928.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

N. S. KOSHLIAKOV

NOTE ON CERTAIN INTEGRALS INVOLVING BESSEL FUNCTIONS

The subject of this paper is to give some infinite integrals of the type

$$\int_0^\infty J_\nu(t)\left\{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}K_{2\nu}(2\varepsilon\sqrt{xt})+e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}K_{2\nu}(2\bar{\varepsilon}\sqrt{xt})\right\}dt=K_\nu(t),$$

where $J_\nu(t)$, $K_\nu(t)$ denote Bessel functions.

1. The object of the present note is to give some infinite integrals of Hardy functions

$$L_\nu(x)=-\frac{2}{\pi}K_\nu(x)-Y_\nu(x), \tag{1}$$

$$M_\nu(x)=\frac{2}{\pi}K_\nu(x)-Y_\nu(x), \tag{2}$$

where $Y_\nu(x)$ and $K_\nu(x)$ denote cylinder functions. To obtain the values of integrals involving the function $M_\nu(x)$, take Hardy's integral

$$\int_0^\infty tJ_\nu(tv)\,Y_\nu\left(\frac{x}{v}\right)dv=-M_{2\nu}(2\sqrt{xt}),\quad -\frac{1}{2}<\nu<\frac{1}{2}, \tag{3}$$

where x and t are positive, multiply the equation (3) by $K_\nu(t)$ and integrate. It is thus found that

$$\int_0^\infty K_\nu(t)\,M_{2\nu}(2\sqrt{xt})\,dt=-\int_0^\infty\frac{Y_\nu(xu)\,u^{-\nu}}{u^2+1}du. \tag{4}$$

Similarly, using Hardy's integral

$$\int_0^\infty tJ_\nu(tv)\,J_\nu\left(\frac{x}{v}\right)dv=J_{2\nu}(2\sqrt{xt}),\quad \nu>-\frac{1}{2},\quad x>0,\quad t>0, \tag{5}$$

we find that

$$\int_0^\infty K_\nu(t)\,J_{2\nu}(2\sqrt{xt})\,dt=\int_0^\infty\frac{J_\nu(xu)\,u^{-\nu}}{u^2+1}du. \tag{6}$$

Now

$$\int_0^\infty\left\{\sin\nu\pi\,J_\nu(xu)+\cos\nu\pi\,Y_\nu(xu)\right\}\frac{u^{-\nu}du}{u^2+1}=-K_\nu(x) \tag{7}$$

and hence we have

$$\int_0^\infty K_\nu(t)\left\{\cos\nu\pi\, M_{2\nu}(2\sqrt{xt}) - \sin\nu\pi\, J_{2\nu}(2\sqrt{xt})\right\} dt = K_\nu(x), \tag{8}$$

where $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$.

If we consider the integral

$$\int_0^\infty tY_\nu(tv)\, J_\nu\left(\frac{x}{v}\right) dv = -L_{2\nu}(2\sqrt{xt}), \tag{9}$$

where $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$, $x > 0$, $t > 0$, we find that

$$\int_0^\infty tK_\nu(t)\, L_{2\nu}(2\sqrt{xt})\, dt = -x\int_0^\infty \frac{Y_\nu(xu)\, u^{2-\nu}}{u^2+1}\, du, \tag{10}$$

and similarly

$$\int_0^\infty tK_\nu(t)\, J_{2\nu}(2\sqrt{xt})\, dt = x\int_0^\infty \frac{J_\nu(xu)\, u^{2-\nu}}{u^2+1}\, du. \tag{11}$$

By using the formula

$$\int_0^\infty \left\{\sin\nu\pi\, J_\nu(xu) + \cos\nu\pi\, Y_\nu(xu)\right\} \frac{u^{2-\nu}}{u^2+1}\, du = K_\nu(x), \tag{12}$$

we obtain

$$\int_0^\infty tK_\nu(t)\left\{\sin\nu\pi\, J_{2\nu}(2\sqrt{xt}) - \cos\nu\pi\, L_{2\nu}(2\sqrt{xt})\right\} dt = xK_\nu(x), \tag{13}$$

where $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$.

Another formula is

$$\int_0^\infty J_\nu(t)\left\{e^{\frac{\nu\pi i}{2}} K_{2\nu}(2\varepsilon\sqrt{xt}) + e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} K_{2\nu}(2\bar{\varepsilon}\sqrt{xt})\right\} dt = K_\nu(x), \tag{14}$$

where $\varepsilon = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$, $\bar{\varepsilon} = \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)$, $\nu > -\frac{1}{2}$.

If we consider the integral

$$\int_0^\infty \left\{\sin\nu\pi\, J_\nu(2\sqrt{xt}) + \cos\nu\pi\, Y_\nu(2\sqrt{xt})\right\} \frac{u^{2\mu+\nu}}{(u^2+1)^{\mu+\nu+1}}\, du,$$

where $\mu > -1$, $\nu > -\frac{5}{2}$, we find that

$$\int_0^\infty K_\mu(t)\, t^{\mu+\nu}\left\{\cos\nu\pi\, M_{2\nu}(2\sqrt{xt}) - \sin\nu\pi\, J_{2\nu}(2\sqrt{xt})\right\} dt =$$

$$=\frac{2^{\mu+\nu-1}}{\sin\nu\pi}\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\,{}_1F_2\left(\mu+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\nu,\ 1-\nu;\ \frac{x^2}{4}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\frac{\Gamma\left(\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,{}_1F_2\left(\mu+\nu+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2},\ 1+\nu,\ \frac{x^2}{4}\right)\right\}, \quad (15)$$

where $\mu>-\frac{1}{2}$ and $\nu>-\frac{1}{2}+|\mu|$.

These results may be also obtained if we use the integrals

$$M_{2\nu}(2\sqrt{xt})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}2\Gamma(s-\nu)\,\Gamma(s+\nu)\cos^2\frac{\pi}{2}(s-\nu)\,\frac{ds}{\pi(xt)^s}, \quad (16)$$

$$L_{2\nu}(2\sqrt{xt})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}2\Gamma(s-\nu)\,\Gamma(s+\nu)\sin^2\frac{\pi}{2}(s-\nu)\,\frac{ds}{\pi(xt)^s}. \quad (17)$$

2. Let us deduce some other integrals by applying Dixon and Ferrar's method.

Let a and z be positive numbers. By Cauchy's theorem we have

$$\int_0^\infty\left\{K_\nu(at)+e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}K_\nu(-iat)\right\}(z^2-it^2)^\mu t^{\nu+1}\,dt=$$

$$=-\int_0^\infty\left\{K_\nu(at)+e^{\frac{\nu\pi i}{2}}K_\nu(iat)\right\}(z^2+it^2)^\mu t^{\nu+1}\,dt, \quad (18)$$

where $\mu<-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}$, $\nu>-1$.

By using the formulae

$$K_\nu(at)+e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}K_\nu(-iat)=\frac{\pi}{2}\left\{M_\nu(at)+iJ_\nu(at)\right\}, \quad (19)$$

$$K_\nu(at)+e^{\frac{\nu\pi i}{2}}K_\nu(iat)=\frac{\pi}{2}\left\{M_\nu(at)-iJ_\nu(at)\right\}, \quad (20)$$

we obtain

$$\int_0^\infty\left\{M_\nu(at)+iJ_\nu(at)\right\}(z^2-it^2)^\mu t^{\nu+1}\,dt=$$

$$=-\int_0^\infty\left\{M_\nu(at)-iJ_\nu(at)\right\}(z^2+it^2)^\mu t^{\nu+1}\,dt$$

and thus

$$\int_0^\infty\left\{M_\nu(at)+iJ_\nu(at)\right\}\left\{(z^2+it^2)^\mu+(z^2-it^2)^\mu\right\}t^{\nu+1}\,dt=$$

$$=2i\int_0^\infty J_\nu(at)(z^2+it^2)^\mu t^{\nu+1}\,dt=\frac{2^{\mu+2}z^{\mu+\nu+1}}{a^{\mu+1}\Gamma(-\mu)}\,\varepsilon^{\mu-\nu+1}K_{\mu+\nu+1}(a\varepsilon z). \quad (21)$$

From the above result we see that

$$\int_0^\infty M_\nu(at)\{(z^2+it^2)^\mu+(z^2-it^2)^\mu\}\, t^{\nu+1}\,dt=$$

$$=\left(\frac{2}{a}\right)^{\mu+1}\frac{z^{\mu+\nu+1}}{\Gamma(-\mu)}\left\{\varepsilon^{\nu-\mu-1}K_{\mu+\nu+1}(a\varepsilon z)+\bar{\varepsilon}^{\nu-\mu-1}K_{\mu+\nu+1}(a\bar{\varepsilon}z)\right\}, \quad (22)$$

where

$$\varepsilon=\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right);\quad \bar{\varepsilon}=\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right);\quad \nu>-1,\quad \mu<-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}.$$

In particular, taking $\mu=-1$, we find that

$$\int_0^\infty \frac{M_{2\nu}(2\sqrt{at})\,t^\nu}{t^2+x^2}\,dt=x^{\nu-1}\left\{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}K_{2\nu}(2\varepsilon\sqrt{ax})+e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}K_{2\nu}(2\bar{\varepsilon}\sqrt{ax})\right\}, \quad (23)$$

where $-1<\nu<\frac{3}{2}$.

By the method used to prove (22) it is readily shown that

$$\int_0^\infty L_\nu(at)\{(z^2+it^2)^\mu-(z^2-it^2)^\mu\}\, t^{\nu+1}\,dt=$$

$$=\left(\frac{2}{a}\right)^{\mu+1}\frac{z^{\mu+\nu+1}}{\Gamma(-\mu)}\left\{\bar{\varepsilon}^{\nu-\mu-1}K_{\mu+\nu+1}(a\bar{\varepsilon}z)-\varepsilon^{\nu-\mu-1}K_{\mu+\nu+1}(a\varepsilon z)\right\}, \quad (24)$$

where $\nu>-1$, $\mu<-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}$.

In particular

$$\int_0^\infty \frac{L_{2\nu}(2\sqrt{at})\,t^{\nu+1}}{t^2+x^2}\,dt=ix^\nu\left\{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}K_{2\nu}(2\bar{\varepsilon}\sqrt{ax})-e^{\frac{\nu\pi i}{2}}K_{2\nu}(2\varepsilon\sqrt{ax})\right\}, \quad (25)$$

where $-1<\nu<\frac{3}{2}$.

Similarly, from the formula

$$\int_0^\infty J_\nu(at)\frac{K_\mu(b\sqrt{t^2+z^2})}{(t^2+z^2)^{\frac{\mu}{2}}}\,t^{\nu+1}\,dt=\frac{a^\nu}{b^\mu}\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{z}\right\}^{\mu-\nu-1}K_{\mu-\nu-1}(z\sqrt{a^2+b^2}),$$

we obtain

$$\int_0^\infty M_\nu(at)\left\{\frac{K_\mu(a\sqrt{z^2+it^2})}{(z^2+it^2)^{\frac{\mu}{2}}}+\frac{K_\mu(a\sqrt{z^2-it^2})}{(z^2-it^2)^{\frac{\mu}{2}}}\right\}t^{\nu+1}\,dt=$$

$$=\frac{z^{1+\nu-\mu}a^\nu}{b^\mu}\left\{\bar{\varepsilon}^{\mu+\nu-1}\frac{K_{1+\nu-\mu}(\bar{\varepsilon}x\sqrt{a^2+ib^2})}{(a^2+ib^2)^{\frac{1+\nu-\mu}{2}}}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{\mu+\nu-1}\frac{K_{1+\nu-\mu}(\varepsilon x\sqrt{a^2-ib^2})}{(a^2-ib^2)^{\frac{1+\nu-\mu}{2}}}\right\}, \tag{26}$$

where $\nu > -1$.

Another formula is

$$\int_0^\infty L_\nu(at)\left\{\frac{K_\mu(a\sqrt{z^2+it^2})}{(z^2+it^2)^{\frac{\mu}{2}}}-\frac{K_\mu(a\sqrt{z^2-it^2})}{(z^2-it^2)^{\frac{\mu}{2}}}\right\}t^{\nu+1}\,dt=$$

$$=\frac{z^{1+\nu-\mu}a^\nu}{b^\mu}\left\{\bar{\varepsilon}^{\mu+\nu-1}\frac{K_{1+\nu-\mu}(\bar{\varepsilon}x\sqrt{a^2+ib^2})}{(a^2+ib^2)^{\frac{1+\nu-\mu}{2}}}-\right.$$

$$\left.-\varepsilon^{\mu+\nu-1}\frac{K_{1+\nu-\mu}(\varepsilon x\sqrt{a^2-ib^2})}{(a^2-ib^2)^{\frac{1+\nu-\mu}{2}}}\right\}, \tag{27}$$

where $\nu > -1$.

The Institute of Mathematics
at the University of Leningrad.
USSR.

Received
13.V.1938.

REFERENCES

[1] Hardy G., Messenger of Math., 1927.
[2] Dixon A. L. and Ferrar W. L., Quarterly Journal of Math., Oxford, 7, 26, 1935.
[3] Koshliakov N., Messenger of Math., 1928.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Р. О. КУЗЬМИН

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ, СВЯЗАННЫХ С КВАДРАТУРАМИ ЧЕБЫШЕВА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье дается полное решение задачи об асимптотическом распределении на плоскости комплексного переменного величин x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, определяемых условием, чтобы формула

$$\frac{n}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

была верна для всех многочленов степени n.

В работе П. Л. Чебышева (1), напечатанной в 1874 г., был предложен способ вычисления определенных интегралов, основанный на формуле

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,f(x)\,dx = C_n\,[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)],$$

в которой числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и C_n выбираются таким образом, что формула оказывается верной для любого полинома степени n.

П. Л. Чебышев определил значения чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. При этом оказалось, что в этом случае числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лежат в интервале $(-1, 1)$, что очень важно для возможности приложений способа Чебышева для эмпирических функций. Подобное же обстоятельство было найдено для $n = 9$. При $n = 8$ среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_8$ оказываются мнимые.

П. Л. Чебышев дал общий метод, позволяющий находить числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и C_n при любом данном n. Однако из его метода непосредственно не вытекало критерия того, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лежат в интервале $(-1, 1)$ при том или другом виде функции $p(x)$ и при соответствующих значениях n.

Акад. С. Н. Бернштейн (2) установил, что для случая $p(x) = 1$ при достаточно больших значениях n среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обязательно должны иметься и такие, которые не принадлежат интервалу $(-1, 1)$. В связи с этим в работе С. Н. Бернштейна были поставлены две проблемы: 1) каково наибольшее значение n, при котором все

числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лежат в интервале $(-1, 1)$? 2) каково асимптотическое распределение чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на плоскости комплексного переменного при $n \to \infty$?

Мне удалось найти довольно полное решение второй проблемы. Результаты были уже сообщены мной в двух заметках в Comptes Rendus ([3,4]). В настоящей работе я даю изложение моего метода.

Мой метод давал также и некоторое, довольно значительное продвижение в направлении первой из отмеченных проблем С. Н. Бернштейна. Однако эта сторона дела мною здесь совершенно опущена, в виду того что в последовавших работах С. Н. Бернштейна первая проблема решена с поистине изумительной степенью законченности.

Следует также заметить, что мой метод совершенно отличается от метода С. Н. Бернштейна. Средства, применяемые в этих методах, существенно различны. Неодинаковы и области приложимости обоих методов.

Наконец, отмечу, что подробное проведение рассуждений выполнено мной лишь для простейшего и наиболее важного случая, когда $p(x)=1$. Однако при небольших видоизменениях чисто технического характера все рассуждение может быть перенесено и на гораздо более общий случай. Аналогичные результаты могут быть получены и для некоторых интегралов Стильтьеса вида $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dp(x)$.

§ 1. Для того, чтобы формула

$$\int\limits_{-1}^{1} p(x) f(x)\,dx = C_n [f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)] \tag{1}$$

была верна всякий раз, когда $f(x)$ обращается в полином степени не большей, чем n, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\int\limits_{-1}^{1} p(x)\,x^m\,dx = C_n \sum_{k=1}^{n} x_k^m; \quad m=0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

В частности, при $m=0$ должно быть

$$\int\limits_{-1}^{1} p(x)\,dx = nC_n. \tag{3}$$

Обозначим величину интеграла в левой части (3) через a и предположим, что

$$a = \int\limits_{-1}^{1} p(x)\,dx \neq 0. \tag{4}$$

Положив для краткости $\int\limits_{-1}^{1} p(x)\,x^m dx = a_m$, из равенства (2) получаем:

$$C_n = \frac{n}{a}; \quad S_m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m = \frac{na_m}{a}. \tag{5}$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно рассматривать как корни некоторого полинома

$$P_n(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n. \tag{6}$$

Коэффициенты этого полинома могут быть найдены с помощью равенств (5) и теории симметрических функций. Поэтому система чисел $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n, C_n$ в равенстве (1), подобранная из условия делать равенство (1) верным для всякого полинома степени n, всегда может быть найдена; притом такая система будет единственной.

П. Л. Чебышев указал другой путь для нахождения чисел x_1, $x_2, \ldots, x_n$ и C_n. Сущность его способа состоит в следующем.

Разлагая в ряды, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} &= \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \ldots \\ \int_{-1}^{1} \frac{p(t)\,dt}{z-t} &= \frac{a}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Оба ряда сходящиеся, если z по абсолютной величине превосходит каждое из чисел $1, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Из (5) и (7) следует, что первые n членов в разложениях функций $a\,\frac{P_n'(z)}{P_n(z)}$ и $n\int_{-1}^{1}\frac{p(t)\,dt}{z-t}$ по убывающим степеням z одинаковые. Таким образом имеем:

$$n\int_{-1}^{1}\frac{p(t)\,dt}{z-t} - a\,\frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{b_m}{z^{m+1}}. \tag{8}$$

Интегрируя это равенство от какого-нибудь допустимого значения z до бесконечности, получаем:

$$n\int_{-1}^{1} p(t)\log(z-t)\,dt = a\log P_n(z) + \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{\alpha_m}{z^m}. \tag{9}$$

Отсюда следует равенство

$$\exp\left(\frac{n}{a}\int_{-1}^{1} p(t)\log(z-t)\,dt\right) = P_n(z)\cdot\exp\left(\frac{1}{a}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{\alpha_m}{z^m}\right). \tag{10}$$

Так как разложение функции $\exp\left(\frac{1}{a}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{\alpha_m}{z^m}\right)$ по убывающим степеням z имеет вид

$$\exp\left(\frac{1}{a}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{\alpha_m}{z^m}\right) = 1 + \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{\beta_m}{z^m},$$

то из (10) следует, что $P_n(z)$ представляет целую часть разложения функции

$$\varphi(z) = \exp\left(\frac{n}{a}\int_{-1}^{1} p(t)\log(z-t)\,dt\right) \tag{11}$$

по убывающим степеням z. Оно имеет вид: ряд

$$\varphi(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_n + \frac{A_{n+1}}{z} + \ldots \tag{12}$$

сходится при $|z| > 1$, а коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в нем имеют такие же значения, как и в равенстве (6).

§ 2. Для дальнейшего весьма важно изучить линии равного модуля функции $\varphi(z)$, определенной равенством (11). Непосредственно ясно, что их уравнение можно написать в таком виде:

$$\omega(z) = \int_{-1}^{1} p(t) \log|z - t|\, dt = C. \tag{13}$$

Полагая $z = \xi + i\eta$, без труда убеждаемся, что $\omega(z) = \omega(\xi, \eta)$ представляет гармоническую функцию от ξ и η, а именно, логарифмический потенциал отрезка длиной две единицы, расположенного по вещественной оси с серединой в начале координат, если $p(t)$ — плотность в точке отрезка с абсциссой, равной t.

Кривые (13), соответствующие разным значениям C, не пересекаются. При условии $\int_{-1}^{1} p(t)\, dt \neq 0$ эти кривые замкнутые. Детали их формы и расположения зависят от вида функции $p(t)$. Так, например, при $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$ они имеют вид эллипсов с фокусами в точках $(-1, 0)$, $(1, 0)$. На отрезке между этими точками величина $\omega(z)$ остается постоянной, а именно, при $-1 < x < 1$ имеет место равенство

$$\int_{-1}^{1} \frac{\log|x - t|\, dt}{\sqrt{1 - t^2}} = -\pi \log 2.$$

В дальнейшем будет важен простейший случай, когда $p(t) = 1$ при любом t в интервале $(-1, 1)$. При этом величина $\omega(z) = \omega(\xi, \eta)$ выражается формулой

$$\omega(z) = \int_{-1}^{1} \log|z - t|\, dt. \tag{14}$$

Простое вычисление показывает, что при $z = \xi + i\eta$ имеем

$$\omega(z) = (1 + \xi) \log r + (1 - \xi) \log r_1 + (\varphi_1 - \varphi)\eta - 2, \tag{15}$$

где

$$r = \sqrt{(1 + \xi)^2 + \eta^2}, \quad r_1 = \sqrt{(1 - \xi)^2 + \eta^2},$$
$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{1 + \xi}{\eta}, \qquad \varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{1 - \xi}{\eta}.$$

В частности, при $\eta = 0$, $z = \xi$ имеем

$$\omega(z) = \omega(\xi) = (1 + \xi) \log|1 + \xi| + (1 - \xi) \log|1 - \xi| - 2. \tag{16}$$

При $\xi > 0$ функция $\omega(\xi)$ возрастающая.

Кривые $\omega(z) = C$ имеют вид овалов, симметричных относительно осей.

Кривая $\omega(z)=\omega(\xi_1)$ лежит внутри кривой $\omega(z)=\omega(\xi_2)$, если $0<\xi_1<\xi_2$.

В известной книге П. Монтеля *Leçons sur les series de polynômes à une variable complexe* изображены на рисунке кривые $\omega(z)=C$ для значений C, равных числам:

$2\log 1{,}2-2$; $2\log 1{,}4-2$; $2\log 1{,}6-2$; $2\log 1{,}8-2$; $2\log 2-2$.

Кривые $\omega(z)=\omega(\xi)$ пересекают ось ординат под прямым углом. Верхняя половина их пересекает ось абсцисс под углом, тангенс которого равен по абсолютному значению величине $\frac{1}{\pi}\log\frac{1+\xi}{1-\xi}$ при $0<\xi<1$. При $\xi\geqslant 1$ кривая пересекает ось абсцисс под прямым углом.

Во многих вопросах имеет значение кривая $\omega(z)=\omega(1)$. В дальнейшем нам понадобятся кривые $\omega(z)=\omega(1-\delta)$, где δ — некоторая положительная дробь. Для их изучения отметим равенство, доказываемое с помощью разложения в ряд:

$$\omega(1-\delta)=2\log 2-2+\delta\log\frac{\delta}{2e}+O(\delta^2). \tag{17}$$

Таким же образом справедлива формула

$$\omega'(1-\delta)=\log\frac{1}{\delta}+\log 2+O(\delta) \tag{18}$$

Исходя из последней, нетрудно получить оценку снизу для расстояния какой-нибудь точки кривой $\omega(z)=\omega(1-\delta_1)$ до кривой $\omega(z)=\omega(1-\delta_2)$, где $\delta_2<\delta_1<\delta_0$.

Пусть $z_1=\xi_1+i\eta_1$ и $z_2=\xi_2+i\eta_2$ точки на первой и второй кривой, где ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 — положительны. Интегрируя по прямой, имеем:

$$\int_{(z_1)}^{(z_2)}\frac{\partial}{\partial s}\omega(\xi,\eta)\,ds=\omega(z_2)-\omega(z_1)=\omega(1-\delta_2)-\omega(1-\delta_1).$$

Полагая $\max\left|\frac{\partial}{\partial s}\omega(\xi,\eta)\right|=M$, находим неравенство:

$$M\,|z_2-z_1|>(\delta_1-\delta_2)\,\omega'(1-\delta);\quad \delta_2<\delta<\delta_1. \tag{19}$$

Отсюда и из (18) следует, что при достаточно малом δ_0 справедливо неравенство

$$|z_2-z_1|>\frac{1}{2M}\log\frac{1}{\delta_0}(\delta_1-\delta_2). \tag{20}$$

Известно, что

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial s}\right|\leqslant\sqrt{\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right)^2}. \tag{21}$$

При этом

$$\frac{\partial\omega}{\partial\eta}=\int_{-1}^{1}\frac{\eta\,dt}{(t-\xi)^2+\eta^2};\quad \frac{\partial\omega}{\partial\xi}=-\int_{-1}^{1}\frac{t-\xi}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt.$$

Отсюда легко следуют неравенства

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right|<\log\frac{1+\xi}{1-\xi}<\log\frac{2}{\delta_0};\quad \left|\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\right|<\pi. \tag{22}$$

После этого из (22) и (21) при достаточно малом δ_0 получается

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial s}\right|<2\log\frac{1}{\delta_0}. \tag{23}$$

Отсюда и из (20) следует, что для расстояния λ между точками кривых $\omega(z)=\omega(1-\delta_1)$ и $\omega(z)=\omega(1-\delta_2)$ справедливо неравенство

$$\lambda > \frac{1}{4}|\delta_1-\delta_2|, \tag{24}$$

если только числа δ_1 и δ_2 меньше некоторой определенной положительной постоянной δ_0.

Это неравенство выведено лишь для тех частей кривых, которые находятся в первом координатном угле. В виду симметрии кривых оно верно всегда.

§ 3. Равенства (6) и (12) позволяют найти асимптотическое выражение полинома $P_n(x)$ при $n\to\infty$ и данном x.

Это можно сделать при довольно общих предположениях относительно функции $p(t)$. В дальнейшем мы рассмотрим лишь наиболее простой случай, когда $p(t)=1$ при $-1<t<1$. При этом, исходя из равенства (12), получаем

$$A_m=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n-m+1}}. \tag{25}$$

Здесь $r>1$, а интегрирование по кругу совершается в положительном направлении. Заменяя в (6) коэффициенты A_m по формуле (25), получаем равенство

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x}-\frac{x^n}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}(z-x)}.$$

Если здесь величина r взята большей, чем $|x|$, то второй интеграл не изменится при замене числа r на любое другое число R большее, чем r. При этом величина $\int\limits_{|z|=R}\frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}(z-x)}$ как угодно мала, если только R соответственно велико. Поэтому справедливо равенство

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x};\quad r>|x|. \tag{26}$$

С помощью теории вычетов круг $|z|=r$ можно заменить любым другим контуром β, лежащим внутри круга и заключающим внутри отрезок между точками $z=-1$ и $z=+1$. После этого (26) можно переписать в таком виде:

$$P_n(x)=\rho(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x}. \tag{27}$$

Здесь $\rho(x)=0$, если точка $z=x$ не лежит в замкнутой области между кругом $|z|=r$ и контуром β. Если же точка $z=x$ лежит внутри этой области, то $\rho(x)=\varphi(x)$. Предположим, что точка $z=x$ удалена от точек $z=-1$ и $z=1$ больше, чем на некоторую величину $3h$, где h — некоторая правильная дробь, меньшая, чем $\frac{\delta_0}{3}$. Ее величину выберем в дальнейшем.

В таком случае контур β в равенстве (27) можно будет выбрать следующим образом. Проведем кривые:

$$\omega(z)=\omega(1-h); \quad \omega(z)=\omega(1-2h); \quad \omega(z)=\omega(1-3h).$$

Согласно неравенству (24) находим, что расстояние между каждыми двумя из этих кривых больше, чем $\frac{h}{4}$. Поэтому одна из этих кривых удалена от точки $z=x$ больше чем на величину $\frac{h}{4}$. Уравнение этой кривой имеет вид

$$\omega(z)=\omega(1-\delta), \tag{28}$$

где δ равно одному из чисел h, $2h$, $3h$.

Обозначим через A, B, C, D точки, в которых z равно числам 1, $1-\delta$, $-1+\delta$, -1. Проведем вдоль вещественной оси разрезы вдоль отрезков AB и CD. Соответствующие точки нижнего края разреза будем обозначать буквами A_1, B_1, C_1, D_1.

Контур β в (27) составим из следующих частей: 1) от A до B по верхнему краю разреза AB, 2) от B до C по верхней половине кривой (28), 3) от C до D по верхнему краю разреза CD, 4) от D_1 до C_1 по нижнему краю разреза D_1C_1, 5) от точки C_1 до точки B_1 по нижней половине кривой (28), 6) от точки B_1 до A_1 по нижнему краю разреза B_1A_1. После этого равенство (27) можно будет переписать в таком виде:

$$P_n(x)=\rho(x)+\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{D_1C_1}+\int_{C_1B_1}+\int_{B_1A_1}\right]. \tag{29}$$

Здесь для краткости пропущено подинтегральное выражение

$$\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x}.$$

Изучение интегралов правой части (29) даст возможность выбрать величину h подходящим образом. После этого из (29) получится асимптотическая формула для $P_n(x)$.

§ 4. Весьма просто получить оценку интегралов по линиям BC и C_1B_1. Так как расстояние точки $z=x$ до кривой (28) больше чем $\frac{h}{4}$, то в данном случае имеем $\left|\frac{1}{z-x}\right| < \frac{4}{h}$. Кроме того, на линии $\omega(z)=\omega(1-\delta)$ имеем

$$|\varphi(z)|=e^{\frac{n}{2}\omega(z)}=e^{\frac{n}{2}\omega(1-\delta)}$$

Поэтому получаем неравенство

$$\left|\int_{BC}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x}+\int_{C_1B_1}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x}\right| < \frac{4l}{h}e^{\frac{n}{2}\omega(1-\delta)} \tag{30}$$

Здесь l — длина кривой (28). При вычислении остальных интегралов в (29) положим, что $\log(z-t)$ имеет вещественное значение при $z-t>0$. Тогда для точек на верхнем крае разреза AB имеем:

$$\left.\begin{aligned}\log(z-t)&=\log|z-t| && \text{при } z>t,\\ \log(z-t)&=\log|z-t|+\pi i && \text{при } z<t.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Таким же образом для точек нижнего края разреза A_1B_1 найдем:

$$\left.\begin{aligned} \log(z-t) &= \log|z-t| \quad \text{при} \quad z > t, \\ \log(z-t) &= \log|z-t| - \pi i \quad \text{при} \quad z < t. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

После этого из равенства (11) без труда получаем, что для z на линии AB справедлива формула

$$\varphi(z) = e^{\frac{n}{2}\omega(z)} e^{\frac{n\pi i(1-z)}{2}}. \tag{33}$$

Для точек A_1B_1 получаем

$$\varphi(z) = e^{\frac{n}{2}\omega(z)} e^{\frac{-n\pi i(1-z)}{2}}. \tag{34}$$

Из (33) и (34) следует равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{AB} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{B_1A_1} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-x} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{1-\delta}^{1} \frac{e^{\frac{n}{2}\omega(z)} \sin\frac{\pi n}{2}(1-z)}{z-x}\,dz. \tag{35}$$

Подобно этому нетрудно убедиться в справедливости формулы

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{CD} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D_1C_1} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-x} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{-1+\delta} \frac{e^{\frac{n}{2}\omega(z)} \sin\frac{\pi n}{2}(1-z)}{z-x}\,dz. \tag{36}$$

Правую часть можно преобразовать, положив $z = -\tau$. Если после этого τ переименовать в z, то получается

$$\int\limits_{-1}^{-1+\delta} \frac{e^{\frac{n}{2}\omega(z)} \sin\frac{\pi n}{2}(1-z)}{z-x}\,dz = -\int\limits_{1-\delta}^{1} \frac{e^{\frac{n}{2}\omega(z)} \sin\frac{\pi n}{2}(1+z)}{z+x}\,dz.$$

После этого правую часть (36) можно заменить величиной

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{1-\delta}^{1} \frac{e^{\frac{n}{2}\omega(z)} \sin\frac{\pi n}{2}(1+z)}{z+x}\,dz.$$

Обозначая через Q сумму интегралов по линиям AB, B_1A_1, CD и D_1C_1, можем написать

$$Q = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{1-\delta}^{1} e^{\frac{n}{2}\omega(z)} \left[\frac{1}{z-x} + \frac{(-1)^n}{z+x}\right] \sin\frac{\pi n}{2}(1-z)\,dz. \tag{37}$$

Полагая $\pi n(1-z) = 2\sigma$, получаем

$$Q = -\frac{2}{\pi^2 n}\int\limits_{0}^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)} \left[\frac{1}{1-x-\frac{2\sigma}{\pi n}} + \frac{(-1)^n}{1+x-\frac{2\sigma}{\pi n}}\right] \sin\sigma\,d\sigma. \tag{38}$$

Исследование полученного интеграла можно выполнить с помощью разложения в ряды. После этого дело сводится к изучению интегралов

$$\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)} \sigma\, d\sigma; \quad \int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)} \sigma^2\, d\sigma, \ldots$$

Этому будет посвящен следующий параграф.

§ 5. Применяя формулу (17), имеем:

$$\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)=2\log 2-2+\frac{2\sigma}{\pi n}\log\frac{\sigma}{e\pi n}+O\left(\frac{\sigma^2}{n^2}\right);$$

$$\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)=n\log\frac{2}{e}-\frac{\sigma}{\pi}\log n+\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi e}+O\left(\frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Отсюда следует равенство

$$e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)}=\left(\frac{2}{e}\right)^n e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\, e^{\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi e}}\, e^{O\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}. \tag{39}$$

Так как $\sigma^2 < \frac{\pi^2 n^2\delta^2}{4}$, то величина $\frac{\sigma^2}{n}$ будет ограниченной, если условие ограниченности выполняется для величины $n\delta^2$. Предположим, что величина $n\delta^2$ при возрастании n ограничена. В таком случае имеем

$$e^{O\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}=1+O\left(\frac{\sigma^2}{n}\right). \tag{40}$$

В силу (39) и (40) можем написать

$$\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)}\sigma\, d\sigma=\left(\frac{2}{e}\right)^n\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\, e^{\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi e}}\sigma\, d\sigma+$$

$$+\left(\frac{2}{e}\right)^n O\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\, e^{\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi e}}\sigma^3\, d\sigma. \tag{41}$$

Оба интеграла в правой части (41) могут изучаться сходными приемами. При изучении первого из них воспользуемся очевидным равенством

$$\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\, e^{\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi e}}\sigma\, d\sigma=\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\sigma\, d\sigma+$$

$$+\int_0^{\pi e} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\left(e^{\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi e}}-1\right)\sigma\, d\sigma+\int_{\pi e}^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\left(e^{\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi e}}-1\right)\sigma\, d\sigma. \tag{42}$$

При этом будем считать, что при $n\to\infty$ величина $\pi n\delta$ возрастает быстрее, чем $4\pi\log\log n$. В таком случае имеем

$$\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\sigma\, d\sigma=\frac{\pi^2}{\log^2 n}+O\left(\frac{\log\log n}{\log^3 n}\right). \tag{43}$$

При изучении следующего интеграла исходим из равенства, справедливого при $\sigma < \pi e$,

$$e^{\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi e}} - 1 = O(\sigma\log\sigma).$$

Из него следует, что

$$\int_0^{\pi e} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log\pi}\left(e^{\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi e}} - 1\right)\sigma\,d\sigma = O(1)\int_0^{\pi e} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\sigma^2|\log\sigma|\,d\sigma =$$

$$= O(1)\int_0^{\infty} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\sigma^2|\log\sigma|\,d\sigma = O\left(\frac{\log\log n}{\log^3 n}\right). \qquad (44)$$

В последнем интеграле первой части (42) исходим из неравенства

$$\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi e} < \frac{\sigma}{\pi}\log\frac{n\delta}{2e},$$

которое справедливо при $\sigma < \frac{\pi n\delta}{2}$. Из него следует неравенство

$$\int_{\pi e}^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\left(e^{\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi e}} - 1\right)\sigma\,d\sigma < \int_{\pi e}^{\infty} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{2e}{\delta}}\sigma\,d\sigma.$$

Величина последнего интеграла легко вычисляется и оценивается. После этого получается формула

$$\int_{\pi e}^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\left(e^{\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi}} - 1\right)\sigma\,d\sigma = \left(\frac{\delta}{2e}\right)^e O\left(\frac{1}{\log\frac{2e}{\delta}}\right). \qquad (45)$$

Сопоставляя (42), (43), (44) и (45), находим

$$\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\,e^{\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi}}\sigma\,d\sigma = \frac{\pi^2}{\log^2 n} + O\left(\frac{\log\log n}{\log^3 n}\right) + \left(\frac{\delta}{2e}\right)^e O\left(\frac{1}{\log\frac{2e}{\delta}}\right). \qquad (46)$$

Сохраняя прежние условия и применяя рассуждение, подобное предыдущему, получаем

$$\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{-\frac{\sigma}{\pi}\log n}\,e^{\frac{\sigma}{\pi}\log\frac{\sigma}{\pi}}\sigma^3\,d\sigma = O\left(\frac{1}{\log^4 n}\right) + O\left(\frac{1}{\log\frac{2e}{\delta}}\right)\left(\frac{\delta}{2e}\right)^e. \qquad (47)$$

Подставляя (46) и (47) в (41), находим

$$\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)}\sigma\,d\sigma = \left(\frac{2}{e}\right)^n\left[\frac{\pi^2}{\log^2 n} + O\left(\frac{\log\log n}{\log^3 n}\right) + \left(\frac{\delta}{2e}\right)^e O\left(\frac{1}{\log\frac{2e}{\delta}}\right)\right]. \qquad (48)$$

Подобно этому, но несколько проще, получается равенство

$$\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)}\sigma^2\,d\sigma=\left(\frac{2}{e}\right)^n\left[O\left(\frac{1}{\log^3 n}\right)+\left(\frac{\delta}{2e}\right)^e O\left(\frac{1}{\log\frac{2e}{\delta}}\right)\right]. \tag{49}$$

Величина δ, имеющаяся в равенствах (48) и (49), может иметь одно из значений h, $2h$, $3h$, как это было видно в § 3. Поэтому величина δ может зависеть от того, каким предположено число h.

Величина h должна быть выбрана так, чтобы выполнялся ряд условий, требовавшихся в некоторых местах рассуждения. Эти условия были следующими:

1) в связи с равенством (18) требуется, чтобы h было меньше некоторой постоянной δ_0;

2) перед введением кривой (28) было предположено, что $3h < \delta_0$;

3) при выводе равенства (40) требовалось, чтобы величина $n\delta^2$ при $n\to\infty$ оставалась ограниченной сверху по абсолютной величине; здесь δ равно одному из чисел h, $2h$, $3h$;

4) при выводе (43) предполагалось, что $\pi n\delta$ при $n\to\infty$ возрастает быстрее, чем $4\pi\log\log n$.

Эти условия будут выполнены при соблюдении следующих двух:

$$h=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right);\quad h>C\frac{\log\log n}{n}. \tag{50}$$

Здесь C—некоторая положительная постоянная.

При выполнении условий (50) равенства (48) и (49) можно переписать в таком виде:

$$\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)}\sigma\,d\sigma=\left(\frac{2}{e}\right)^n\frac{\pi^2}{\log^2 n}\left[1+O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right], \tag{51}$$

$$\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)}\sigma^2\,d\sigma=\left(\frac{2}{e}\right)^n\frac{\pi^2}{\log^2 n}\cdot O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right). \tag{52}$$

§ 6. Возвращаясь к равенству (38), преобразуем интеграл с помощью разложения в ряды. При этом получаем равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\sigma=\sigma+O(\sigma^3),\\
&\frac{1}{1-x-\frac{2\sigma}{\pi n}}=\frac{1}{1-x}+\frac{\sigma}{|1-x|^2}\cdot O\left(\frac{1}{n}\right),\\
&\frac{(-1)^n}{1+x-\frac{2\sigma}{\pi n}}=\frac{(-1)^n}{1+x}+\frac{\sigma}{|1+x|^2}\cdot O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Отсюда без труда следует равенство

$$\left[\frac{1}{1-x-\frac{2\sigma}{\pi n}}+\frac{(-1)^n}{1+x-\frac{2\sigma}{\pi n}}\right]\sin\sigma=\sigma\left[\frac{1}{1-x}+\frac{(-1)^n}{1+x}\right]+O\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\sigma^2}{|1-x|^2}+$$
$$+O\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\sigma^2}{|1+x|^2}+O(\sigma^3)\left[\frac{1}{1-x}+\frac{(-1)^n}{1+x}\right]+\frac{\sigma^4}{|1-x|^2}O\left(\frac{1}{n}\right)+$$
$$+\frac{\sigma^4}{|1+x|^2}\cdot O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (54)$$

С его помощью равенство (38) можно заменить таким:

$$-\frac{\pi^2 n}{2}Q=\left[\frac{1}{1-x}+\frac{(-1)^n}{1+x}\right]\left[\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)}\sigma\,d\sigma+O(1)\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)}\sigma^3\,d\sigma\right]+$$
$$+O\left(\frac{1}{n}\right)\left[\frac{1}{|1-x|^2}+\frac{1}{|1+x|^2}\right]\left[\int_0^{\frac{\pi n\delta}{2}} e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{2\sigma}{\pi n}\right)}(\sigma^2+\sigma^4)\,d\sigma\right]. \qquad (55)$$

При этом два последние интеграла в (55) представляют величину порядка $\left(\frac{2}{e}\right)^n\cdot\frac{1}{\log^3 n}$, как в этом нетрудно убедиться на основании предыдущего. Поэтому, и в силу (51), из (55) следует равенство

$$Q=-\left[\frac{1}{1-x}+\frac{(-1)^n}{1+x}\right]\left(\frac{2}{e}\right)^n\cdot\frac{2}{n\log^2 n}\left[1+O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right]+$$
$$+O\left(\frac{1}{n^2\log^3 n}\right)\left(\frac{2}{e}\right)^n\left[\frac{1}{|1-x|^2}+\frac{1}{|1+x|^2}\right]. \qquad (56)$$

Сопоставляя (29), (30), (37) и (56), получаем

$$P_n(x)=\rho(x)-\frac{2\left(\frac{2}{e}\right)^n}{n\log^2 n}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{(-1)^n}{1+x}\right]\left[1+O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right]+$$
$$+O\left(\frac{1}{n^2\log^3 n}\right)\left(\frac{2}{e}\right)^n\left[\frac{1}{|1-x|^2}+\frac{1}{|1+x|^2}\right]+O\left(\frac{1}{h}\right)e^{\frac{n}{2}(1-\delta)}. \qquad (57)$$

Здесь, согласно сказанному, величина δ имеет одно из трех значений: h, $2h$, $3h$, где $h=\frac{\sqrt{\log n}}{n}$. Поэтому, обозначив последнее слагаемое в (57) через R, имеем

$$R=O\left(\frac{n}{\sqrt{\log n}}\right)e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{\sqrt{\log n}}{n}\right)}. \qquad (58)$$

Из (17), при $\delta=\frac{\sqrt{\log n}}{n}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega\left(1-\frac{\sqrt{\log n}}{n}\right)=2\log 2-2+\frac{\sqrt{\log n}}{n}\log\frac{\sqrt{\log n}}{n}+O\left(\frac{\log n}{n^2}\right),\\
&\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{\sqrt{\log n}}{n}\right)=n\log\frac{2}{e}+\frac{\sqrt{\log n}}{2}\log\frac{\sqrt{\log n}}{n}+O\left(\frac{\log n}{n}\right),\\
&e^{\frac{n}{2}\omega\left(1-\frac{\sqrt{\log n}}{n}\right)}=\left(\frac{2}{e}\right)^n\left(\frac{\sqrt{\log n}}{n}\right)^{\frac{\sqrt{\log n}}{2}}e^{O\left(\frac{\log n}{n}\right)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Из (58) и (59) следует равенство

$$R=O\left(\frac{n}{\log n}\right)\left(\frac{2}{e}\right)^n\left(\frac{\sqrt{\log n}}{n}\right)^{\frac{\sqrt{\log n}}{2}}\cdot O(1). \tag{60}$$

Ясно, что справедлива и более простая оценка

$$R=\left(\frac{2}{e}\right)^n\cdot O\left(\frac{1}{n\log^3 n}\right).$$

Поэтому (57) можно переписать так:

$$P_n(x)=\rho(x)-\frac{2\left(\frac{2}{e}\right)^n}{n\log^2 n}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{(-1)^n}{1+x}\right]\left[1+O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right]+$$
$$+O\left(\frac{1}{n\log^3 n}\right)\cdot\left(\frac{2}{e}\right)^n+O\left(\frac{1}{n^2\log^3 n}\right)\left[\frac{1}{|1-x|^2}+\frac{1}{|1+x|^2}\right]\cdot\left(\frac{2}{e}\right)^n. \tag{61}$$

Все оценки здесь имеют место равномерно относительно x, если только каждая из величин $|1-x|$ и $|1+x|$ больше, чем $3h$, где $h=\frac{\sqrt{\log n}}{n}$.

§ 7. Если положить, что точка x лежит на кривой $\omega(z)=\omega(1-12h)$, то, согласно неравенству (24), расстояние точки x до точек $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ будет больше, чем $3h$. Поэтому для каждого из таких x будет справедлива формула (61). При этом величина $\rho(x)$ будет равна нулю, согласно сказанному, при выводе равенства (27).

В таком случае вместо (61) будем иметь формулу

$$\left(\frac{e}{2}\right)^n n\log^2 n\, P_n(x)=-2\left[\frac{1}{1-x}+\frac{(-1)^n}{1+x}\right]\left[1+O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right]+$$
$$+O\left(\frac{1}{\log n}\right)+O\left(\frac{1}{n\log n}\right)\left[\frac{1}{|1-x|^2}+\frac{1}{|1+x|^2}\right]. \tag{62}$$

Первое слагаемое по абсолютной величине больше, чем некоторая положительная постоянная, а второе произвольно мало при достаточно большом n.

С помощью совсем элементарных соображений нетрудно показать, что на кривой $\omega(z)=\omega(1-12h)$ отношение последнего слагаемого к первому при $n\to\infty$ стремится к нулю равномерно относительно x. Поэтому при достаточно больших значениях n в правой части (62) первое слагаемое по абсолютному значению постоянно остается больше, чем сумма остальных. Отсюда, по известной теореме Руше, в силу (62) следует, что полином $P_n(x)$ внутри кривой $\omega(z)=\omega(1-12h)$ имеет столько же корней, как и функция $\frac{1}{1-x}+\frac{(-1)^n}{1+x}$, т. е. ни одного при четном n и один при нечетном n. Известно, что при нечетном n полином $P_n(x)$ имеет корень $x=0$. Из предыдущего видно, что иных корней он не имеет, пока x находится внутри кривой $\omega(z)=\omega(1-12h)$

Если x находится снаружи от кривой $\omega(z)=\omega(1-12h)$ и при этом величины $1-x$ и $1+x$ по абсолютному значению будут больше, чем $3h$,

то формула (61) все еще будет иметь силу. В этом случае она принимает вид:

$$P_n(x) = \varphi(x) - \frac{2\left(\frac{2}{e}\right)^n}{n \log^2 n}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{(-1)^n}{1+x}\right]\left[1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right] +$$
$$+ O\left(\frac{1}{n\log^3 n}\right)\left(\frac{2}{e}\right)^n + O\left(\frac{1}{n^2\log^3 n}\right)\left[\frac{1}{|1-x|^2} + \frac{1}{|1+x|^2}\right]\cdot\left(\frac{2}{e}\right)^n. \quad (63)$$

В области $\omega(z) \geqslant \omega(1)$ имеем

$$|\varphi(x)| > \left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

Отсюда и из равенства (63) следует, что для точек x, удаленных от точек $(-1, 0)$, $(1, 0)$ больше, чем на $3h$, и лежащих вне кривой $\omega(z) = \omega(1)$, величина $P_n(x)$ не обращается в нуль при достаточно больших значениях n, так как тогда первое слагаемое в правой части (63) превосходит по абсолютной величине сумму остальных.

Таким образом из сказанного следует, что при достаточно больших значениях n и при $h = \frac{\sqrt{\log n}}{n}$ корни полинома $P_n(x)$ могут располагаться либо внутри кругов

$$|x - 1| = 3h, \quad |x + 1| = 3h,$$

либо в полосе между кривыми $\omega(z) = \omega(1)$ и $\omega(z) = \omega(1 - 12h)$. Кроме этих корней может иметься лишь один корень $x = 0$ и тогда и только тогда, если n нечетное число.

§ 8. Можно дать некоторые дополнительные сведения о распределении корней, характеризующие плотность их распределения в различных частях узкой полоски вдоль кривой $\omega(z) = \omega(1)$. Для этого стоит воспользоваться известной теоремой, в силу которой число N корней функции $f(z)$ внутри контура λ определяется формулой

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda} \frac{d\log f(z)}{dz}\, dz. \quad (64)$$

Для аналитической функции величина производной не зависит от способа приближения Δz к нулю. Поэтому можем считать, что

$$\frac{d\log f(z)}{dz} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\Delta\log f(z)}{\Delta z_1},$$

где Δz_1 изображается вектором длиной δ, направленным по внешней нормали. Кроме того, интеграл в правой части (64) можно рассматривать как предел суммы слагаемых $\sum\limits_{\delta\to 0}\frac{d\log f(z)}{dz}\Delta z_2$, где Δz_2 изображается вектором длиной δ, направленным по касательной в положительную сторону обхода. Так как при этом $\Delta z_2 = i\Delta z_1$, то равенство (64) можно переписать в таком виде:

$$N = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda} \frac{\partial\log f(z)}{\partial\nu}\, ds. \quad (65)$$

В виду вещественности левой части последнее равенство можно написать еще и в такой форме:

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda} \frac{\partial \operatorname{Re} \log f(z)}{\partial \nu} ds. \tag{66}$$

Здесь $\partial\nu$ означает дифференцирование по нормали.

Кроме того, при вычислении интеграла в правой части (64) по части замкнутой кривой λ, можно величину интеграла по части этой кривой заменить величиной $\frac{1}{2\pi}\Delta \arg f(z)$, где изменение аргумента берется в предположении, что точка z движется вдоль по взятой части контура.

Пусть точки A и B соответствуют значениям $z = x_1$ и $z = x_2$ и находятся на кривой $\omega(z) = \omega(1)$ по одну сторону от вещественной оси. Проведем в этих точках нормали к кривой $\omega(z) = \omega(1)$ до пересечения с кривой $\omega(z) = \omega(1 - 12h)$ в точках D и C. Будем предполагать, что область, ограниченная контуром $ABCD$, лежит вне кругов $|x \pm 1| = 3h$. Обозначим число корней $P_n(x)$ внутри контура $ABCD$ через N. Имея в виду сделанные замечания, можем написать

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_1 + \frac{1}{2\pi}\Delta_2 + \frac{1}{2\pi}\Delta_3 + \frac{1}{2\pi}\Delta_4. \tag{67}$$

Здесь Δ_1, Δ_2, Δ_3 и Δ_4 означают изменения аргумента $P_n(x)$, если точка x описывает линии AB, BC, CD и DA.

Пользуясь найденными раньше асимптотическими выражениями $P_n(x)$ для точек x, на кривой CD имеем

$$P_n(x) = -\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{1}{n \log^2 n} \left[\frac{1}{1-x} + \frac{(-1)^n}{1+x}\right] [1 + \theta_1(x)],$$

где $|\theta_1(x)| < 1$ при достаточно больших значениях n.

Отсюда легко следует, что $\Delta_3 = O(1)$. Таким же образом на линии AB имеем

$$P_n(x) = \varphi(x)[1 + \theta_2(x)]; \quad |\theta_2(x)| < 1.$$

Отсюда без труда находим, что

$$\Delta_1 = \Delta_{AB} \arg \varphi(x) + O(1). \tag{68}$$

При этом, согласно сказанному, имеем

$$\Delta_{AB} \arg \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{AB} \frac{\partial \log|\varphi(x)|}{\partial \nu} ds = \frac{n}{4\pi} \int_{AB} \frac{\partial \omega(x)}{\partial \nu} ds. \tag{69}$$

Для нахождения величины N остается найти еще величины Δ_2 и Δ_4, т. е. величину изменения $\arg P_n(x)$, если x пробегает отрезок нормали между кривыми $\omega(z) = \omega(1)$ и $\omega(z) = \omega(1 - 12h)$. Для этого полезно ввести аналитическую функцию переменного x, которая совпадает с величиной $\operatorname{Re} P_n(x)$, когда x движется по нормали. Такую функцию $f(x)$ легко выразить через значения полинома $P_n(x)$. При этом очевидны неравенства

$$\Delta_2 < (n_1 + 1)\pi; \quad \Delta_4 < (n_2 + 1)\pi,$$

где n_1 и n_2 — число корней функции $f(x)$ на соответствующем отрезке нормали. Числа n_1 и n_2 меньше, чем числа корней в кругах, построен-

ных как на диаметре на отрезках нормали. С помощью неравенств, основанных на формуле Иенсена-Якоби, легко дать оценку для чисел n_1 и n_2. Таким образом получаются равенства

$$\Delta_2 = O(1), \quad \Delta_3 = O(1).$$

Эти оценки справедливы равномерно для всех допустимых положений A и B. Отсюда следует формула для числа корней N внутри $ABCD$

$$N = \frac{n}{4\pi} \int_{AB} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds. \tag{70}$$

§ 9. Предыдущие результаты позволяют дать оценку для числа вещественных корней полинома $P_n(x)$. Для этого заметим предварительно, что по свойству гармонических функций имеем

$$\int_{\lambda} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds = \int_{\lambda_1} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds. \tag{71}$$

Здесь в левой части контур λ состоит из всей кривой $\omega(z) = \omega(1)$, а в правой части контур λ_1 — какой-нибудь простой замкнутый контур, внутри которого заключен контур λ. На контуре λ_1 законны все преобразования, какие проводятся в следующем вычислении с понятными обозначениями:

$$\int_{\lambda_1} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds = \int_{\lambda_1} ds \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{-1}^{1} \log|z - t|\, dt = \int_{\lambda_1} ds \int_{-1}^{1} \frac{\cos \varphi}{r} dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} dt \int_{\lambda_1} \frac{\cos \varphi}{r} ds = \int_{-1}^{1} dt \cdot 2\pi = 4\pi.$$

Поэтому из (71) получается

$$\int_{\lambda} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds = 4\pi. \tag{72}$$

В равенстве (70) придадим A и B такие положения, чтобы дуга AB была самой длинной из допустимых, т. е. такие, чтобы область $ABCD$ еще не заходила внутрь кругов $|x \pm 1| = 3h$. Обозначим через A_1, B_1, C_1 и D_1 точки, симметричные относительно оси абсцисс для точек A, B, C и D. Обозначим через N число корней $P_n(x)$ в областях $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. В таком случае имеем:

$$N = \frac{n}{4\pi} \int_{AB} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds + \frac{n}{4\pi} \int_{B_1A_1} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds + O(1). \tag{73}$$

Кроме того, из (72) следует

$$n = \frac{n}{4\pi} \int_{\lambda} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds. \tag{74}$$

Отсюда

$$n - N = \frac{n}{4\pi} \int_{\mu} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds + O(1). \tag{75}$$

Здесь контур μ состоит из дуг A_1A и BB_1 контура λ. Ясно, что число вещественных корней полинома $P_n(x)$ не больше, чем $n - N$. С другой стороны, для величины $\int\limits_{\mu} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds$ нетрудно найти простую оценку

$$\int\limits_{\mu} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} ds = O\left(\frac{\log n}{n}\right). \tag{76}$$

Отсюда и из (75) следует, что число вещественных корней полинома $P_n(x)$ есть величина порядка не высшего, чем $\log n$.

Ленинградский гос. университет.

Поступило 28. V. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чебышев П. Л., О квадратурах, Соч., т. II, 1907, стр. 65—180.
2. Бернштейн С. Н., О формуле приближенного интегрирования Чебышева, Изв. Ак. Наук СССР, 1932, стр. 1219—1227.
3. Kuzmin, R. O., Sur la méthode de Tchebycheff pour l'évaluation approchée des integrales, C. R. Acad. Sci., Paris, 201, 1935, pp. 1094—1095.
4. Kuzmin R. O., Sur la méthode de quadrature de Tchebycheff, C. R. Acad. Sci., Paris, 202, 1936, pp. 272—273.

R. O. KUZMIN. SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNÔMES DANS LA MÉTHODE DE QUADRATURE DE TCHEBYCHEFF

RÉSUMÉ

La méthode de quadrature de Tchebycheff est fondée sur la formule

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, dx = \frac{2}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right].$$

Dans cette formule les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont choisis de telle manière, que cette formule soit vraie dans tous les cas, où la fonction $f(x)$ est un polynôme de dégré n. On peut considérer les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme les racines d'un polynôme $P_n(x)$. Dans un travail de S. N. Bernstein on trouve posé le problème sur la distribution asymptotique pour $n \to \infty$ des racines du polynôme $P_n(x)$.

Dans ce travail je donne quelques résultats, qui se rattachent à cette question. Parmi ces resultats on a en particulier les suivants.

I. Soit

$$\log \varphi(x) = \frac{n}{2} \int\limits_{-1}^{1} \log(x - t)\, dt$$

où $\log(x - t)$ est réel pour $x > 1$.

Dans ces conditions on a la formule suivante:

$$P_n(x) = \rho(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{\varphi(z)\, dz}{z - x}.$$

On suppose ici que le contour C contient à l'intérieur l'intervalle de l'axe reel: $-1 < z < 1$. La fonction discontinue $\rho(x)$ est définie par les conditions:

$\rho(x)=\varphi(x)$, si x est un point intérieur du domaine C,

$\rho(x)=0$, si x est un point extérieur du domaine C.

II. Considérons les courbes qui sont définies sur la plan $\xi O\eta$ par l'équation

$$\omega(z)=\int_{-1}^{1}\log|z-t|\,dt=C, \qquad z=\xi+i\eta.$$

Supposons encore qu'on a

$$|x\pm 1|>h, \quad h=\frac{\sqrt{\log n}}{n}.$$

On a la formule asymptotique pour $n\to\infty$:

$$n\log^2 nP_n(x)=n\log^2 n\cdot\rho(x)-$$
$$-2\left(\frac{2}{e}\right)^n\left[\frac{1}{1-x}+\frac{(-1)^n}{1+x}\right]\left[1+O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right]+$$
$$+O\left(\frac{1}{\log n}\right)\left(\frac{2}{e}\right)^n+O\left(\frac{1}{n\log n}\right)\left[\frac{1}{|1-x|^2}+\frac{1}{|1+x|^2}\right]\cdot\left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

En particuliér, si le point x est situé sur la courbe

$$\omega(z)=\omega(1-12h),$$

on a

$$\left(\frac{e}{2}\right)^n n\log^2 n\cdot P_n(x)=-2\left[\frac{1}{1-x}+\frac{(-1)^n}{1+x}\right]\left[1+O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right]+$$
$$+O\left(\frac{1}{\log n}\right)+O\left(\frac{1}{n\log n}\right)\left[\frac{1}{|1-x|^2}+\frac{1}{|1+x|^2}\right].$$

III. Les racines du polynôme $P_n(x)$ se trouvent entre les courbes $\omega(z)=\omega(1-12h)$ et $\omega(z)=1$, si l'on exclue pour les valeurs impaires de n la racine $x=0$ et si l'on exclue quelque racines qui peuvent se trouver à l'interieur des cercles $|x+1|\leqslant 3h$, $|x-1|\leqslant 3h$.

On peut dire que toutes les racines de $P_n(x)$, sans compter la racine possible $x=0$, se trouvent pour les valeurs très grandes de n dans le voisinage immédiat de la courbe $\omega(z)=1$.

IV. Soit N le nombre des racines du polynôme $P_n(x)$ qui sont situés dans le voisinage de la partie AB de la courbe $\omega(z)=1$. On a la formule:

$$N=\frac{n}{4\pi}\int_{AB}\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\,ds\cdot[1+\varepsilon(n)].$$

Dans cette formule $\varepsilon(n)\to 0$ pour $n\to\infty$. On désigne par $\frac{\partial\omega}{\partial\nu}$ comme d'habitude la dérivée suivant la normale de la courbe AB.

V. Soit N_0 le nombre des racines réeles de polynôme $P_n(x)$. On a la formule:

$$N_0=O(\log n).$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Я. Л. ГЕРОНИМУС

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕБЫШЕВА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье дается решение задачи о минимуме интеграла

$$\int_0^{2\pi} |G(\theta)|\, d\theta,$$

где $G(\theta)$—произвольная тригонометрическая сумма n-го порядка, коэффициенты которой связаны данным линейным соотношением.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу: *найти минимум интеграла*

$$L(G) = \int_0^{2\pi} |G(\theta)|\, d\theta \tag{1}$$

от модуля тригонометрического полинома порядка не выше n[1]

$$G(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta}, \quad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \beta_0 = 0, \tag{2}$$

коэффициенты которого связаны линейным соотношением

$$\omega(G) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k c_{n-k} = 1, \qquad c_k = a_k + ib_k, \quad b_0 = 0. \tag{3}$$

Эта задача является обобщением задачи Чебышева (1)—он рассматривал рациональные полиномы, а линейное соотношение сводилось к заданию одного коэффициента. Задача Чебышева при задании старшего коэффициента была затем рассмотрена А. Коркиным и Г. Золотаревым (2) и M. Fujiwara (3); затем она была обобщена в различных направлениях акад. С. Н. Бернштейном (4–7), а в последнее время Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном (8), (9). В статьях (10–14) мы рассмотрели некоторые обобщения задачи Чебышева; в частности, мы показали, что поставленная нами задача эквивалентна задаче Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна (15), а также дали ее решение в случае, когда в линейное соотношение вхо-

[1] $\Re a$ обозначает вещественную часть a.

дят не все коэффициенты, а $\left[\frac{2n+2}{3}\right]$ старших.

В настоящей статье мы даем решение поставленной задачи в общем случае.

§ 1

ЛЕММА I. *Среди тригонометрических полиномов $G^*(\theta)$, осуществляющих минимум интеграла $L(G)$ при условии $\omega(G)=1$, есть полином, все корни которого вещественны и различны; если он порядка $n-\nu$, $(\nu\geqslant 0)$, то все остальные полиномы, осуществляющие минимум, отличаются от него множителями порядка $\leqslant\nu$, сохраняющими знак.*

Доказательство совершенно аналогично доказательству, приведенному в нашей заметке ([13]).

Обозначая через $G^*(\theta)$ полином порядка n с $2(n-\nu)$ вещественными и различными корнями, осуществляющий минимум (1) при условии (3), мы находим необходимые условия экстремума

$$\operatorname{sgn} G^*(\theta)=\frac{\lambda}{\pi}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)\right\}+R_{n+1},$$

где λ — неопределенный множитель, а R_{n+1} — остаток ряда, начинающийся с гармоник $(n+1)$-го порядка,

$$R_{n+1}=\sum_{k=n+1}^{\infty}(A_k\cos k\theta+B_k\sin k\theta).$$

Мы имеем, таким образом,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sgn} G^*(\theta)=\frac{\lambda}{\pi}\Re\left\{\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_k z^k\right\}+R_{n+1},\quad z=e^{i\theta},\\ L(G^*)=\lambda\omega(G^*)=\lambda.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Докажем теперь следующую лемму:

ЛЕММА II. *Всякий тригонометрический полином $G(\theta)$ порядка m, все корни которого вещественны и различны, может быть представлен (и притом единственным образом) в такой форме*

$$G(\theta)=\Re\left\{z^{-m}u^2(z)\right\},\qquad z=e^{i\theta},\tag{5}$$

где $u(z)$ — полином степени m, все корни которого лежат в области $|z|<1$.

Пусть

$$G(\theta)=A\prod_{k=1}^{2m}\sin\frac{\theta-\theta_k}{2},\qquad 0\leqslant\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_{2m}<2\pi;$$

введем два полинома

$$\psi(z)=\prod_{r=1}^{m}(z-z_{2r-1});\quad \varphi(z)=\prod_{r=1}^{m}(z-z_{2r});\quad z_k=e^{i\theta_k};$$

при $z=e^{i\theta}$ имеем

$$\frac{\psi(z)\,z^{-\frac{m}{2}}}{2^m\sqrt{\psi(0)}}=\prod_{r=1}^{m}\sin\frac{\theta-\theta_{2r-1}}{2};\qquad \frac{\varphi(z)\,z^{-\frac{m}{2}}}{2^m\sqrt{\varphi(0)}}=\prod_{r=1}^{m}\sin\frac{\theta-\theta_{2r}}{2},$$

и, таким образом, находим

$$G(\theta)=A\frac{\psi(z)\,\varphi(z)}{2^{2m}z^m\sqrt{\psi(0)\,\varphi(0)}},\quad z=e^{i\theta}.$$

Введем два новых полинома $u(z)$ и $v(z)$

$$\frac{\sqrt{A}\,\psi(z)e^{-\frac{\pi i}{4}}}{2^m\sqrt{\psi(0)}}=u(z)-v(z);\qquad \frac{\sqrt{A}\,\varphi(z)e^{\frac{\pi i}{4}}}{2^m\sqrt{\varphi(0)}}=u(z)+v(z);\tag{6}$$

легко видеть, что они связаны между собой соотношением[1]

$$v(z)=iz^m\,\overline{u}\left(\frac{1}{z}\right).\tag{7}$$

Из (6) и (7) имеем

$$\frac{2e^{\frac{\pi i}{4}}u(z)}{z^{\frac{m}{2}}}=\frac{\sqrt{A}}{2^m}\left\{\frac{\psi(z)}{z^{\frac{m}{2}}\sqrt{\psi(0)}}+i\,\frac{\varphi(z)}{z^{\frac{m}{2}}\sqrt{\varphi(0)}}\right\};$$

на контуре $|z|=1$ полином $u(z)$ не обращается в нуль, ибо обе функции $\frac{\psi(z)\,z^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{\psi(0)}}$ и $\frac{\varphi(z)\,z^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{\varphi(0)}}$ вещественны при $|z|=1$ и не равны нулю одновременно; при обходе круга $|z|=1$ в положительном направлении аргумент функции $u(z)\,z^{-\frac{m}{2}}$ увеличивается на $m\pi$; отсюда следует, что полином $u(z)$ имеет все m корней в области $|z|<1$. Из формул (6) и (7) находим

$$\frac{A\psi(z)\,\varphi(z)}{2^{2m}\sqrt{\psi(0)\,\varphi(0)}}=u^2(z)+z^{2m}\,\overline{u}^{2}\left(\frac{1}{z}\right)$$

и окончательно получим

$$G(\theta)=\Re\left\{z^{-m}u^2(z)\right\},\quad z=e^{i\theta}.$$

§ 2

Так как полином $G^*(\theta)$ имеет $2(n-\nu)$ перемен знака в интервале $(0, 2\pi)$, то его можно представить в указанном виде

$$G^*(\theta)=\Re\left\{z^{-m}u^2(z)\right\}|\tau(z)|^2,\quad z=e^{i\theta},\quad m=n-\nu,\tag{8}$$

где $\tau(z)$ — произвольный полином степени $\leqslant\nu$. В таком случае мы имеем

$$\operatorname{sgn} G^*(\theta)=\operatorname{sgn}\Re\left\{z^{-m}u^2(z)\right\}=\operatorname{sgn}\Re\left\{\frac{u(z)}{z^m\,\overline{u}\left(\frac{1}{z}\right)}\right\},\quad z=e^{i\theta};\tag{9}$$

[1] $\overline{F}(z)$ обозначает функцию $F(z)$, у которой все коэффициенты заменены сопряженными величинами.

введем обозначение

$$\frac{u(z)}{z^m \bar{u}\left(\frac{1}{z}\right)} = e^{im\varphi}, \quad z = e^{i\theta}, \tag{10}$$

где аргумент φ меняется на 2π одновременно с θ. Мы получим

$$\operatorname{sgn} G^*(\theta) = \operatorname{sgn} \cos m\varphi = \frac{4}{\pi} \Re \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{(2k+1)i\varphi}}{2k+1} =$$

$$= \frac{4}{\pi} \Re \left\{ \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{u(z)}{z^m \bar{u}\left(\frac{1}{z}\right)} \right] \right\}. \tag{11}$$

Сравнивая (4) с (11), мы видим, что на контуре $|z|=1$ совпадают вещественные части двух функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где

$$f_1(z) = \frac{\lambda}{\pi} \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k z^k \right\} + (z^{n+1}),$$

$$f_2(z) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \left\{ \frac{u(z)}{z^m \bar{u}\left(\frac{1}{z}\right)} \right\};$$

пользуясь (6) и (7), легко находим

$$J\left\{ f_2(0) \right\} = \frac{4}{\pi} J \left\{ \operatorname{arc\,tg} \frac{iu(0)}{v(0)} \right\} = 0,$$

и, кроме того, $J\left\{ f_1(0) \right\} = 0$.

Отсюда вытекает равенство

$$4 \operatorname{arc\,tg} \left\{ \frac{u(z)}{z^m \bar{u}\left(\frac{1}{z}\right)} \right\} = \lambda \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k z^k \right\} + (z^{n+1}), \quad |z| \leqslant 1;$$

полагая $\lambda = \frac{1}{L}$, мы приходим к разложению

$$\frac{u(z)}{z^m \bar{u}\left(\frac{1}{z}\right)} = \operatorname{tg} \left\{ \frac{1}{4L} \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k z^k \right] \right\} + (z^{n+1}), \qquad |z| \leqslant 1; \tag{12}$$

нам надо теперь определить $L = \frac{1}{\lambda}$ так, чтобы полином $u(z)$ степени n имел все свои корни в области $|z| > 1$.

Задача сводится к нахождению функции

$$F(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \ldots + \mu_n z^n + (z^{n+1}), \quad |z| \leqslant 1, \tag{13}$$

регулярной в области $|z| \leqslant 1$ и удовлетворяющей в ней неравенству $|F(z)| \leqslant 1$, причем первые $n+1$ коэффициентов функции $F(z)$ определяются из разложения

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4L} \left\{ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k z^k \right\} = \mu_0 + \mu_1 z + \ldots + \mu_n z^n + (z^{n+1}). \tag{14}$$

Как известно, условия J. Schur'a ([16]), необходимые и достаточные для существования функции $F(z)$ указанного типа, заключаются в том, чтобы детерминанты $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$, где

$$M_{k+1}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_k \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \mu_0 & \cdots & \mu_{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & \mu_0 \\ \bar{\mu}_0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{\mu}_k & \bar{\mu}_{k-1} & \cdots & \bar{\mu}_0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \ (k=0, 1, \ldots, n), \quad (15)$$

или все были положительны, или же чтобы они, начиная с некоторого, были равны нулю, т. е.

$$M_1>0, \quad M_2>0, \ldots, M_m>0; \quad M_{m+1}=M_{m+2}=\ldots=M_{n+1}=0;$$

в этом последнем случае функция $F(z)$ будет типа (12) и по коэффициентам $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ можно определить единственным образом полином $u(z)$ степени m, все корни которого лежат в области $|z|<1$.

Детерминанты M_{k+1} служат дискриминантами эрмитовых форм

$$H_{k+1}=\sum_{i=0}^{k}|x_i|^2-\sum_{i=0}^{k}|\bar{\mu}_0 x_i+\bar{\mu}_1 x_{i+1}+\ldots+\bar{\mu}_{k-i} x_k|^2; \qquad (16)$$

при $L=\infty$ все эти формы являются определенными положительными; при $L=\frac{|c_0|}{2\pi}$ имеем $\mu_0=\pm 1$, и, полагая в (16) $x_0=x_1=\ldots=x_{k-1}=0$, $x_k \neq 0$, получим

$$H_{k+1}=|x_k|^2\left\{1-\sum_{i=0}^{k}|\mu_i|^2\right\}\leqslant 0;$$

следовательно, при уменьшении L от ∞ до $\frac{|c_0|}{2\pi}$ хоть один детерминант при некотором значении $L=L_0$ обратится в нуль; пусть это будет M_{m+1}; в таком случае мы имеем при $L=L_0$[1]

$$M_1>0, \quad M_2>0, \ldots, M_m>0; \quad M_{m+1}=M_{m+2}=\ldots=M_{n+1}=0.$$

Найдем при $L=L_0$ полином $u(z)$ (степени m) из (12); в таком случае при $z=e^{i\theta}$ имеем

$$\operatorname{sgn} G^*(\theta)=\operatorname{sgn}\Re\left\{z^{-m}u^2(z)\right\}|\tau(z)|^2=\operatorname{sgn}\Re\left\{\frac{u(z)}{z^m\bar{u}\left(\frac{1}{z}\right)}\right\}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\Re\left\{\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{u(z)}{z^m\bar{u}\left(\frac{1}{z}\right)}\right]\right\}=\frac{1}{\pi L_0}\Re\left\{\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_k z^k\right\}+R_{n+1}; \qquad (17)$$

---

[1] Наши рассуждения аналогичны тем, которыми пользуются Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн в § 4 ([15]).

умножая обе части этого последнего равенства на произвольный тригонометрический полином $G(\theta)$ порядка не выше n и интегрируя, мы найдем неравенство

$$\left|\int_0^{2\pi} G(\theta)\operatorname{sgn} G^*(\theta)\,d\theta\right| = \frac{1}{L_0}\left|\omega(G)\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |G(\theta)|\,d\theta, \tag{18}$$

причем знак равенства имеет место только при

$$G(\theta) \equiv G^*(\theta);$$

таким образом, полином $G^*(\theta)$ действительно осуществляет минимум интеграла (1) при условии (3).

Мы приходим к теореме:

ТЕОРЕМА I. *Для всякого тригонометрического полинома*

$$G(\theta) = \Re\sum_{k=0}^{n}\bar{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta}, \quad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \beta_0 = 0,$$

порядка не выше n, коэффициенты которого связаны линейным соотношением

$$\omega(G) = \Re\sum_{k=1}^{n}\bar{\gamma}_k c_{n-k} = 1, \quad c_k = a_k + ib_k, \quad b_0 = 0,$$

имеет место неравенство

$$L(G) = \int_0^{2\pi} |G(\theta)|\,d\theta \geqslant \frac{1}{L_0}; \tag{19}$$

L_0 является наибольшим положительным корнем уравнения

$$M_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \mu_0 & \ldots & \mu_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & \mu_0 \\ \bar{\mu}_0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{\mu}_n & \bar{\mu}_{n-1} & \ldots & \bar{\mu}_0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

причем числа μ определяются из разложения

$$\operatorname{tg}\left\{\frac{1}{4L}\left[\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\bar{c}_k z^k\right]\right\} = \mu_0 + \mu_1 z + \ldots + \mu_n z^n + \ldots;$$

если при $L = L_0$ $M_{n+1} = \ldots = M_{m+1} = 0$, $M_m \neq 0$, то знак равенства в (19) имеет место для полинома $G^*(\theta)$, который (с точностью до постоянного множителя) равен

$$G^*(\theta) = \Re\left\{z^{-m}u^2(z)\right\}|\tau(z)|^2, \quad z = e^{i\theta};$$

$\tau(z)$ *произвольный полином степени не выше* $\nu = n - m$, *а полином* $u(z)$ *степени* m, *все корни которого лежат в области* $|z| < 1$, *находится из разложения*

$$\frac{u(z)}{z^m \bar{u}\left(\frac{1}{z}\right)} = \operatorname{tg}\left\{\frac{1}{4L_0}\left[\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k z^k\right]\right\} + (z^{n+1}); \quad |z| \leqslant 1.$$

§ 3

Из нашей теоремы I легко получить тот частный случай, когда в линейное соотношение входят не все коэффициенты, т. е. когда оно имеет следующий вид:

$$\omega(G) = \Re \sum_{k=0}^{s} \bar{\gamma}_k c_{s-k} = 1, \tag{20}$$

причем $s \leqslant \left[\frac{2n-1}{3}\right]$; в этом случае формула (12) дает

$$\frac{u(z)}{z^m \bar{u}\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^{n-s}}{4L} \sum_{k=0}^{s} \bar{c}_k z^k + (z^{n+1}); \tag{21}$$

отсюда вытекает, что $u(z)$ должно делиться на z^{n-s} и, таким образом, мы имеем

$$u(z) = z^{n-s} q(z), \tag{22}$$

где $q(z)$—полином степени $\sigma = s - \nu$, все корни которого лежат в области $|z| < 1$.

Полагая $\delta = 4L$, находим

$$\delta \frac{q(z)}{z^\sigma \bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 z + \ldots + \bar{c}_s z^s + (z^{s+1}); \tag{23}$$

полином $G^*(\theta)$ имеет вид

$$G^*(\theta) = \Re\left\{z^{n-2s+\nu} q^2(z)\right\} |\tau(z)|^2, \quad z = e^{i\theta}. \tag{24}$$

Детерминант M_{n+1} в этом случае равен $M_{n+1} = \delta^{2n-2s} C_{s+1}(\delta)$, где

$$C_{r+1}(\delta) = \begin{vmatrix} \delta & 0 & \cdots & 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_r \\ 0 & \delta & \cdots & 0 & 0 & c_0 & \cdots & c_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \delta & 0 & 0 & \cdots & c_0 \\ \bar{c}_0 & 0 & \cdots & 0 & \delta & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_0 & \cdots & 0 & 0 & \delta & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{c}_r & \bar{c}_{r-1} & \cdots & \bar{c}_0 & 0 & 0 & \cdots & \delta \end{vmatrix}, \quad (r = 0, 1, \ldots, s); \tag{25}$$

если δ_0 является наибольшим корнем уравнения $C_{s+1}(\delta) = 0$ кратности $\nu + 1$ $(\nu \geqslant 0)$, то при $\delta = \delta_0$ имеем

$$C_1(\delta_0) > 0, \ldots, C_\sigma(\delta_0) > 0; \quad C_{\sigma+1}(\delta_0) = \ldots = C_s(\delta_0) = 0,$$

умножая обе части этого последнего равенства на произвольный тригонометрический полином $G(\theta)$ порядка не выше n и интегрируя, мы найдем неравенство

$$\left|\int_0^{2\pi} G(\theta)\operatorname{sgn} G^*(\theta)\,d\theta\right| = \frac{1}{L_0}\left|\omega(G)\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |G(\theta)|\,d\theta, \qquad (18)$$

причем знак равенства имеет место только при

$$G(\theta) \equiv G^*(\theta);$$

таким образом, полином $G^*(\theta)$ действительно осуществляет минимум интеграла (1) при условии (3).

Мы приходим к теореме:

ТЕОРЕМА I. *Для всякого тригонометрического полинома*

$$G(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta}, \quad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \beta_0 = 0,$$

порядка не выше n, коэффициенты которого связаны линейным соотношением

$$\omega(G) = \Re \sum_{k=1}^{n} \bar{\gamma}_k c_{n-k} = 1, \quad c_k = a_k + ib_k, \quad b_0 = 0,$$

имеет место неравенство

$$L(G) = \int_0^{2\pi} |G(\theta)|\,d\theta \geqslant \frac{1}{L_0}; \qquad (19)$$

L_0 является наибольшим положительным корнем уравнения

$$M_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \mu_0 & \dots & \mu_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \mu_0 \\ \bar{\mu}_0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\mu}_n & \bar{\mu}_{n-1} & \dots & \bar{\mu}_0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

причем числа μ определяются из разложения

$$\operatorname{tg}\left\{\frac{1}{4L}\left[\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k z^k\right]\right\} = \mu_0 + \mu_1 z + \dots + \mu_n z^n + \dots;$$

если при $L = L_0$ $M_{n+1} = \dots = M_{m+1} = 0$, $M_m \neq 0$, то знак равенства в (19) *имеет место для полинома $G^*(\theta)$, который (с точностью до постоянного множителя) равен*

$$G^*(\theta) = \Re\left\{z^{-m}u^2(z)\right\}|\tau(z)|^2, \quad z = e^{i\theta};$$

Деля обе части (29) на $|q(z)|^2$, получим при $z=e^{i\theta}$

$$\frac{\operatorname{sgn} P(\theta,\alpha)}{|q(z)|^2}=\frac{\lambda}{|q(z)|^2}+\frac{4}{\pi}\Re\left\{\sin\alpha\cdot z^n\left[\frac{1}{z^s\bar{q}\left(\frac{1}{z}\right)}\right]^2\right\}+R_{n+1}; \tag{31}$$

умножая обе части этого равенства на $G(\theta)$ и интегрируя, получим неравенство

$$\int_0^{2\pi}\frac{|G(\theta)|\,d\theta}{|q(z)|^2}-\lambda\int_0^{2\pi}\frac{G(\theta)\,d\theta}{|q(z)|^2}\geqslant 4\cos\frac{\pi\lambda}{2}, \tag{32}$$

справедливое для всех полиномов $G(\theta)$, удовлетворяющих условию

$$\alpha_0 a'+\beta_0 b'=1,\quad a'+ib'=\frac{1}{u_0^2}. \tag{33}$$

Мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА II. *Пусть* $q(z)=\sum_{k=0}^{s}u_k z^{s-k}$ *данный полином, все корни которого лежат в области* $|z|<1$; *пусть также*

$$P(\theta)=\Re\left\{z^{n-2s}q^2(z)\right\},\qquad s\leqslant\left[\frac{n-1}{2}\right],\quad z=e^{i\theta}.$$

В таком случае задача о минимуме выражения

$$\int_0^{2\pi}|G(\theta)|\,d\theta-\lambda\int_0^{2\pi}G(\theta)\,d\theta,\qquad -1\leqslant\lambda\leqslant 1, \tag{34}$$

при условии

$$\int_0^{2\pi}\frac{P(\theta)\,G(\theta)}{|q(z)|^2}\,d\theta=1,\qquad z=e^{i\theta}, \tag{34'}$$

эквивалентна задаче о минимуме выражения

$$\int_0^{2\pi}\frac{|G(\theta)|\,d\theta}{|q(z)|^2}-\lambda\int_0^{2\pi}\frac{G(\theta)\,d\theta}{|q(z)|^2},\qquad z=e^{i\theta}, \tag{35}$$

при условии

$$\int_0^{2\pi}\frac{P(\theta)\,G(\theta)}{|q(z)|^4}\,d\theta=1,\qquad z=e^{i\theta}; \tag{35'}$$

минимум в обоих случаях равен $\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi\lambda}{2}$ *и полином, осуществляющий его, равен (с точностью до постоянного множителя)*

$$P(\theta)+|q(z)|^2\sin\frac{\pi\lambda}{2},\qquad z=e^{i\theta}. \tag{36}$$

Главный интерес этой теоремы заключается в следующем: условие (34′) сводится к линейному соотношению между $s+1$ старшими коэффициентами полинома $G(\theta)$

$$\int_0^{2\pi}\frac{P(\theta)\,G(\theta)}{|q(z)|^2}\,d\theta=\frac{\pi}{\delta_0}\,\omega(G)=\frac{\pi}{\delta_0}\Re\sum_{k=0}^{s}\bar{\gamma}_k c_{s-k}=1;\quad z=e^{i\theta};$$

условие же (35′) налагает ограничение только на один старший коэффициент

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\theta)\,G(\theta)}{|q(z)|^4}\,d\theta = \pi\Re\left\{\frac{\bar{\gamma}_0}{u_0^2}\right\} = 1, \qquad z = e^{i\theta}.$$

Из теоремы II легко получить соответствующую теорему для неотрицательных тригонометрических полиномов.

ТЕОРЕМА II′. *Задача о минимуме интеграла*

$$\int_0^{2\pi} G(\theta)\,d\theta,$$

где $G(\theta)$ *неотрицательный тригонометрический полином, подчиненный условию* (34′), *эквивалентна задаче о минимуме интеграла с весом*

$$\int_0^{2\pi} \frac{G(\theta)}{|q(z)|^2}\,d\theta, \qquad z = e^{i\theta},$$

при условии (35′); *минимум в обоих случаях равен* 2 *и осуществляется полиномом*

$$|q(z)|^2 + \Phi(\theta), \quad s \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right], \quad z = e^{i\theta}.$$

Для доказательства заметим, что при $G(\theta) \geqslant 0$ мы имеем из (32)

$$\int_0^{2\pi} G(\theta)\,d\theta \geqslant \frac{4\cos\frac{\pi\lambda}{2}}{\pi(1-\lambda)};$$

приближая λ к 1, получим

$$\int_0^{2\pi} G(\theta)\,d\theta \geqslant \frac{4}{\pi}\lim_{\lambda\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\lambda}{1-\lambda} = 2.$$

Институт математики и механики при Гос. Харьковском университете

Поступило 16.IV.1938.

ЛИТЕРАТУРА

1 Чебышев П., Об интерполировании в случае большого числа данных, доставляемых наблюдениями, Сочинения, т. I, стр. 387—469.

2 Korkine A. et Zolotareff G., Sur un certain minimum, Nouvelles Annales de Mathématiques, 1873.

3 Fujiwara M., Über die Polynome von der kleinsten totalen Schwankung, Tohoku Math. Journal, **3**, 1913, p. 133.

4 Бернштейн С. Н., Sur une propriété des polynômes de Tchebycheff, Доклады Академии Наук СССР, 1927, стр. 405—07.

5 Бернштейн С. Н., Sur une classe de polynômes orthogonaux, Сообщ. Харьк. мат. общ., т. IV, 1930, стр. 79—93.

6 Бернштейн С. Н., Complément à l'article «Sur une classe de polynômes orthogonaux», ibid., t. V, 1932, стр. 59—60.

7 Bernstein S., Sur les polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini, Journal des Mathématiques, t. IX, 1930, p. 127.

8 Ахиезер Н. И., Verallgemeinerung einer Korkine-Zolotareffschen Minimum-Aufgabe, ibid., t. XIII, 1936, pp. 3—14.

[9] A c h y e s e r N. et K r e i n M., Sur deux questions de minima qui se rattachent au problème de moments, Доклады Академии Наук СССР, т. I, 1936, стр. 343—46.
[10] G e r o n i m u s J., Sur l'equivalence de deux problèmes extrémaux, Comptes Rendus, **199**, 1934, pp. 1010—12.
[11] G e r o n i m u s J., Sur quelques propriétés extrémales de polynômes, dont les coefficients premiers sont donnés, Сообщ. Харьк. мат. общ., т. XII, 1935, стр. 49—59.
[12] G e r o n i m u s J., On some quadrature formulas and on allied theorems on trigonometric polynomials, Bull. Am. Math. Soc., t. 42, 1936, pp. 129—35.
[13] G e r o n i m u s J., On some extremal properties of polynomials, Annals of Math., t. 87, 1936, pp. 483—517.
[14] Г е р о н и м у с Я., О некоторых экстремальных задачах, Известия Академии Наук СССР, Матем. серия, № 2, 1937, стр. 185—202.
[15] A c h y e s e r N. und K r e i n M., Über Fouriersche Reihen beschränkter summierbaren Funktionen und ein neues Extremumproblem (I часть), Сообщ. Харьк. мат. общ., т. IX, 1934, стр. 9—28.
[16] S c h u r J., Über Potenzreihen die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal für die reine und angewandte Mathematik, B. 147, 1917, S. 205—32; B. 148, 1918, S. 122—45.

J. GERONIMUS. SUR UN PROBLÈME EXTRÉMAL DE TCHEBYCHEFF

RÉSUMÉ

On démontre le théorème suivant:
Pour chaque polynôme trigonométrique

$$G(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k e^{i(n-k)\theta}, \quad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \beta_0 = 0,$$

d'ordre $\leqslant n$ *vérifiant la condition*

$$\omega(G) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k c_{n-k} = 1, \qquad c_k = a_k + ib_k, \qquad b_0 = 0$$

on a l'inégalité

$$L(G) = \int_0^{2\pi} |G(\theta)|\, d\theta \geqslant \frac{1}{L_0}; \tag{1}$$

L_0 *étant la plus grande racine de l'équation* $M_{n+1} = 0$ (15); *les nombres* μ *sont définis par le developpement*

$$\operatorname{tg}\left\{\frac{1}{4L}\left[\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k z^k\right]\right\} = \mu_0 + \mu_1 z + \ldots + \mu_n z^n + (z^{n+1}).$$

Si pour $L = L_0$ *on a*

$$M_{n+1} = M_n = \ldots = M_{m+1} = 0, \quad M_m \neq 0,$$

le signe d'égalité dans (I) *n'a lieu que pour le polynôme* $G^*(\theta)$ *qui est donné par la formule*

$$G^*(\theta) = \Re\left\{z^{-m} u^2(z)\right\} |\tau(z)|^2, \qquad z = e^{i\theta},$$

où $\tau(z)$ *est un polynôme arbitraire de degré* $\leqslant \nu = n - m$ *assujeti à la seule restriction* $\omega(G^*) = 1$; $u(z)$ *est un polynôme de degré* m *ne s'annulant pas pour* $|z| \geqslant 1$ *qui est défini par le developpement*

$$\frac{u(z)}{z^m \bar{u}\left(\frac{1}{z}\right)} = \operatorname{tg}\left\{\frac{1}{4L_0}\left[\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k z^k\right]\right\} + (z^{n+1}).$$

Soit maintenant $q(z) = \sum_{k=0}^{s} u_k z^{s-k}$ un polynôme donné ayant toutes ses racines dans le domaine $|z| < 1$ et soit

$$P(\theta) = \Re\left\{ z^{n-2s} q^2(z) \right\}, \qquad z = e^{i\theta};$$

on a alors le théorème suivant:

La recherche du minimum de l'expression

$$\int_0^{2\pi} |G(\theta)|\, d\theta - \lambda \int_0^{2\pi} G(\theta)\, d\theta, \qquad -1 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

sous la condition

$$\int_0^{2\pi} \frac{G(\theta) P(\theta)}{|q(z)|^2}\, d\theta = 1, \qquad z = e^{i\theta}, \quad s \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right] \tag{II}$$

est équivalente à la recherche du minimum de l'expression

$$\int_0^{2\pi} \frac{|G(\theta)|\, d\theta}{|q(z)|^2} - \lambda \int_0^{2\pi} \frac{G(\theta)\, d\theta}{|q(z)|^2}, \qquad z = e^{i\theta},$$

sous la condition

$$\int_0^{2\pi} \frac{G(\theta) P(\theta)}{|q(z)|^4}\, d\theta = 1. \tag{III}$$

La condition (II) est une relation linéaire entre les $s+1$ premiers coefficients de $G(\theta)$ tandis que dans la condition (III) on ne trouve que le premier coefficient.

Un théorème analogue subsiste pour les polynômes non négatifs.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

В. И. РОМАНОВСКИЙ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье используются разные аналитические неравенства, как, например, обобщенное неравенство Коши, неравенства Гельдера и Минковского, для построения различных статистических критериев независимости, степенной зависимости и линейного подобия.

1. Обычный ход математического исследования какой-либо конкретной проблемы заключается в следующем. Путем введения определенных предположений, доступных математической формулировке и большей частью упрощающих действительное положение вещей, создается математический аппарат, из исследования свойств которого вытекают затем при надлежащей конкретной интерпретации свойства изучаемых явлений, подлежащих опытной проверке. Свойства созданного математического аппарата играют в таком исследовании основную роль: они призваны отражать реальные свойства изучаемого круга явлений. В этом положении заключаются и сила и недостатки математического исследования: при удачном выборе математического аппарата мы получаем точно действующее и большей частью значительно более простое и эффективное средство, чем прямое экспериментальное исследование, но вместе с тем из математического аппарата нельзя извлечь ничего другого, кроме того, что в нем заключается, тогда как эксперимент обладает бесконечными возможностями. Но обычный ход математического исследования конкретных проблем не исчерпывает всех возможностей математики и заключает в себе элемент случайности, ибо аппарат создается ad hoc. Можно ожидать более эффективного использования математики в применениях, если обратить этот обычный ход и рассмотреть, к исследованию какого рода конкретных проблем пригоден известный класс математических средств, точно и более или менее широко определенный.

Такой задаче обращения посвящена настоящая работа. В ней рассматривается, как можно использовать богатый запас аналитических неравенств в построении статистических критериев. Чтобы пояснить основную мысль работы, мы рассмотрим для примера вопрос о роли неравенства Коши в теории корреляции.

2. Неравенство Коши. Предположим, что для двух величин X и Y независимые наблюдения дали два ряда значений

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_n, \\ y_1, y_2, \ldots, y_n, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

которые обнаруживают некоторую зависимость между соответствующими значениями X и Y. Наиболее простые вопросы, которые возникают при исследовании рядов (1) с точки зрения зависимости между X и Y, заключаются в определении формы и силы связи X и Y. При определении формы связи чаще всего выбирают линейную зависимость, так как факты часто согласуются с таким предположением. Если искать эту зависимость по способу наименьших квадратов, то она может быть написана в виде

$$\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y} = r\,\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}, \qquad (2)$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x и σ_y представляют средние и стандарты наблюденных значений X и Y. Затем можно путем довольно естественных рассуждений ([1]) пытаться оценить силу связи X и Y, определяя значение величины

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma_x}\cdot\frac{y_i-\bar{y}}{\sigma_y}\right),$$

которая оказывается равной коэффициенту r в уравнении (2). Здесь руководящим принципом является тот факт, что в случае линейной независимости X и Y выписанная нами величина равна нулю, а в случае функциональной линейной связи их она равна единице. Таким путем, который в действительности был труден, полон неясностей и был пройден далеко не быстро, получивши полную ясность и обоснованность только в стохастической теории корреляции, мы приходим к коэффициенту корреляции

$$r = \frac{\sum (x_i-\bar{x})\,(y_i-\bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}$$

как к критерию линейной зависимости и мере линейной связи.

Этому коэффициенту нетрудно придать вид

$$r = \frac{\sum a_i b_i}{\sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2}},$$

вводя величины

$$a_i = x_i - \bar{x} \text{ и } b_i = y_i - \bar{y},$$

и тогда основное для теории корреляции свойство коэффициента корреляции принимать значение 0, когда X и Y линейно независимы, и значение 1, когда они находятся в функциональной линейной связи, тотчас вытекает из неравенства Коши

$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum a_i^2 \sum b_i^2, \qquad (3)$$

справедливого для любых вещественных a_i и b_i и открытого задолго до его использования в теории корреляции. В частности, известно,

что равенство в нем достигается только в том случае, когда b_i пропорциональны a_i, т. е. когда

$$b_i = ka_i \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причем k — некоторое постоянное число, следовательно, когда a_i и b_i связаны функциональной линейной связью. Последнее обстоятельство показывает, что коэффициент корреляции может служить для оценки силы лишь линейной связи между наблюденными значениями. Оно вытекает из свойств примененного к оценке связи между X и Y математического аппарата и ранее, часто и теперь, упускалось из виду: коэффициент корреляции рассматривается в этих случаях как мера связи X и Y вообще, что совершенно недопустимо.

Но использованием неравенства Коши в теории корреляции не кончаются его статистические применения. Сейчас мы укажем еще на два применения его, которые должны играть важную роль в статистических исследованиях, хотя, насколько мне известно, никем еще не указывались.

3. Критерий независимости. Будем рассматривать некоторый признак или явление А и его отрицание $\overline{\text{A}}$ наряду с некоторыми признаками или явлениями B_1, B_2, ..., B_n и предположим, что нужно установить, влияют ли последние некоторым образом на А или не влияют. Пусть нам даны результаты N опытов, представленных табл. 1, в которой a_i и b_i представляют частоты комбинаций AB_i и $\overline{\text{A}}\text{B}_i$, $c_i = a_i + b_i$, $a = \sum a_i$, $b = \sum b_i$ и $N = \sum a_i + \sum b_i = \sum c_i = a + b$.

Таблица 1

	B_1	B_2	...	B_n	
А	a_1	a_2	...	a_n	a
$\overline{\text{А}}$	b_1	b_2	...	b_n	b
	c_1	c_2	...	c_n	N

Возьмем теперь неравенство (3) Коши и будем в нем истолковывать a_i и b_i как частоты табл. 1. Построим затем величину

$$c = \frac{\left(\sum ab\right)^2}{\sum a^2 \sum b^2}. \qquad (4)$$

Мы будем иметь

$$0 \leqslant c \leqslant 1, \qquad (5)$$

причем $c = 1$ лишь тогда, когда ряды частот a_i и b_i пропорциональны. Очевидно, что такая пропорциональность указывает на полную независимость А от B_1, B_2, ..., B_n. Затем c может равняться нулю в наших конкретных условиях лишь тогда, когда для всякого $a_i \neq 0$ соответственно $b_i = 0$, причем не все a_i или не все b_i нули. Этот случай всегда можно представить в виде табл. 2.

Таблица 2

	B_1	B_2	...	B_m	B_{m+1}	...	B_n
А	a_1	a_2	...	a_m	0	...	0
$\overline{\text{А}}$	0	0	...	0	b_{m+1}	...	b_n

Условимся полагать $c = 0$ и тогда, когда все a_i или все b_i нули. Тогда мы мо-

жем равенство $c=0$ истолковать как указание на полную связь A с $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что число c можно рассматривать как критерий независимости A от $B_1, B_2, \ldots, B_n$; если $c=1$, мы имеем полную независимость, если $c=0$ — полную зависимость; промежуточные значения c указывают на бо́льшую или меньшую зависимость A от B_i.

Нетрудно построить теорию критерия c, но мы не будем этим заниматься. Заметим только, что многое для нее подготовлено в теории корреляции и в теории ассоциации или сопряженности. Следует также отметить, что критерий c проще коэффициента сопряженности, при помощи которого также можно исследовать зависимость или независимость A и B_i и который для нашего случая можно написать в таком виде:

$$K=\frac{N}{\sqrt{n-1}}\sum\left[\frac{\left(a_i-\frac{ac_i}{N}\right)^2}{ac_i}+\frac{\left(b_i-\frac{bc_i}{N}\right)^2}{bc_i}\right]$$

4. Критерий сходства воздействия. Пусть, например, испытывается воздействие ряда факторов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ на урожаи двух сортов хлопка A и B. Предположим, что результаты опытов, поставленных для изучения этого воздействия, представлены табл. 3, где a_i и b_i обозначают урожаи сортов A и B, наблюденные при воздействии фактора C_i.

Таблица 3

	C_1	$C_2 \ldots C_n$
A	a_1	$a_2 \ldots a_n$
B	b_1	$b_2 \ldots b_n$

Воспользуемся опять величиной

$$c=\frac{\left(\sum ab\right)^2}{\sum a^2\sum b^2}.$$

Она может равняться 1 только тогда, когда a_i пропорционально b_i. Но пропорциональность величин a_i величинам b_i указывает на то, что воздействие факторов C_i на A и B одинаково. Приближение же c к нулю указывает на то, что воздействие это приближается к полному различию. Предельный случай, для нашей задачи фактически едва ли возможный, соответствует схеме табл. 2 и показывал бы, что факторы C_i можно разбить на две группы, из которых одна совершенно угнетала бы сорт A, а другая — сорт B. Такое положение дела соответствовало бы полному различию в воздействии факторов C_i на сорта A и B.

Табл. 3 может представлять также результаты изменений, которые претерпевают величины A и B в зависимости от изменений некоторой третьей величины или признака C. Тогда c можно рассматривать как критерий линейного подобия в значениях A и B.

5. Обобщение неравенства Коши. Известно ([2], стр. 16), что неравенство Коши можно обобщить следующим образом: для всех вещественных

$$a_i=a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im} \quad (i=1, n)$$

имеет место неравенство

$$D_n \equiv \begin{vmatrix} \sum a_1^2 & \sum a_1 a_2 & \cdots & \sum a_1 a_n \\ \sum a_2 a_1 & \sum a_2^2 & \cdots & \sum a_2 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum a_n a_1 & \sum a_n a_2 & \dots & \sum a_n^2 \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

причем равенство наступает только тогда, когда ряды значений величины

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

линейно зависимы, т. е. когда можно найти числа

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

не все одновременно равные нулю и такие, что

$$\sum_i x_i a_{ih} = 0 \quad \text{для} \quad h = \overline{1, m}.$$

Пусть теперь

$$c_{ih} = \frac{\sum_k a_{ik} a_{hk}}{\sqrt{\sum_k a_{ik}^2 \sum_k a_{hk}^2}}. \tag{6}$$

Тогда, введя обозначение

$$K_n = \frac{D_n}{\sum a_1^2 \sum a_2^2 \cdots \sum a_n^2},$$

мы будем иметь

$$K_n = \begin{vmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{7}$$

Затем нетрудно показать, что

$$K_n \leqslant K_{n-1}, \tag{8}$$

откуда, так как

$$K_2 = 1 - c_{12}^2 \leqslant 1,$$

мы будем иметь

$$K_n \leqslant 1.$$

Таким образом, введенная нами величина K_n удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant K_n \leqslant 1. \tag{9}$$

Мы не будем останавливаться на хорошо известной интерпретации неравенств (9), которую они находят в теории множественной корреляции, и рассмотрим их истолкование для того случая, когда a_{ih} представляет частоту комбинации значений A_i и B_h двух признаков A и B в некоторой статистической совокупности S. Тогда существование равенств

$$\sum_i x_i a_{ih} = 0 \text{ для } h = \overline{1, m}$$

равносильно независимости признаков A и B в S, следовательно, равенство

$$K_n = 0$$

представляет признак независимости A и B в S.

Заметим теперь, что K_2 может равняться 1 лишь тогда, когда $c_{12} = 0$. Затем, так как

$$K_3 \leqslant K_2 \leqslant K_1,$$

то K_3 может равняться 1 лишь тогда, когда $K_2 = 1$, т. е. когда $c_{12} = 0$. Но в этом случае

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 1 \end{vmatrix} = 1 - c_{13}^2 - c_{23}^2,$$

следовательно, K_3 может равняться 1 лишь тогда, когда кроме c_{12} исчезают также c_{13} и c_{23}.

Затем, если $c_{ih} = 0$ для $i, h = \overline{1, n-1}$, то

$$K_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots 0 & c_{2n} \\ 0 & 1 & \ldots 0 & c_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots 1 & c_{n-1, n} \\ c_{n2} & c_{n3} & \ldots c_{n, n-1} & 1 \end{vmatrix} - c_{1n}^2,$$

откуда

$$K_n = 1 - c_{1n}^2 - c_{2n}^2 - \ldots - c_{n-1,n}^2.$$

Следовательно,

$$K_n = 1$$

лишь тогда, когда все c_{ih} ($ih = \overline{1, n}$; $i \neq h$) нули.

Наконец, заметим, что все c_{ih} могут равняться нулю только тогда, когда в каждом

$$c_{ih} = \frac{\sum\limits_k a_{ik} a_{hk}}{\sqrt{\sum\limits_k a_{ik}^2 \sum a_{hk}^2}}$$

нет пар значений a_{ik} и a_{hk}, одновременно не равных нулю; в этом случае необходимо $m \geqslant n$ и признаки A_i и B_h ($i = \overline{1, n}$ и $h = \overline{1, m}$) полностью ассоциированы. Если $m = n$, то все c_{ih} могут равняться нулю только тогда, когда существует такая перестановка

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

номеров $1, 2, \ldots, n$, для которой

$$a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \ldots, a_{n\alpha_n}$$

не нули, тогда как все другие a_{ih} нули. Так как и этот случай указывает на полную ассоциацию признаков A_i и B_h, при которой каждый из признаков A_i сопровождается одним определенным признаком B_h и только им, то, следовательно, равенство

$$K_n = 1$$

указывает на полную сопряженность признаков A_i и B_h в совокупности S.

Таким образом, мы видим, что число K_n можно считать коэффициентом сопряженности признаков A_i и B_h.

Следует заметить, что этот коэффициент проще для вычислений, чем коэффициент взаимной сопряженности Пирсона-Чупрова. Кроме того, повидимому, легче построить и теорию его, чем для коэффициента Пирсона-Чупрова.

Можно указать еще на одно применение числа K_n. Пусть a_{ih} $(h=\overline{1,m})$ представляют значения величин a_i $(i=\overline{1,n})$, которые последние получают под воздействием факторов B_h $(h=\overline{1,m})$. Тогда число K_n можно истолковывать как критерий сходства воздействия рассматриваемых факторов на величины a_i, причем равенство

$$K_n=0$$

указывает на то, что факторы B_h на величины a_i воздействуют одинаково, так так тогда мы имеем соотношения

$$\sum_i x_i a_{ih}=0 \quad (h=\overline{1,m}),$$

в которых не все x_i нули, а равенство

$$K_n=1$$

указывает на полную специфичность воздействия факторов B_h на величины a_i, которая сказывается в том, что для любой пары a_{ik} и a_{hk} $(k=\overline{1,m})$ любых величин a_i и a_h оба члена пары не могут одновременно отличаться от нуля.

6. Неравенство Гельдера. Неравенство Гельдера ((2), стр. 24, теорема 13) можно формулировать следующим образом.

Пусть a_i, b_i, $i=\overline{1,n}$, неотрицательные вещественные числа,

$$k \neq 0, \neq 1 \quad \text{и} \quad k'=\frac{k}{k-1};$$

тогда

$$\sum a_i b_i \leqslant \left(\sum a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}, \quad \text{если} \quad k>1, \tag{10}$$

и

$$\sum a_i b_i \geqslant \left(\sum a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}, \quad \text{если} \quad k<1, \tag{11}$$

причем равенство в обоих случаях достигается только тогда, когда числа a_i^k пропорциональны числам $b_i^{k'}$; во втором случае $(k<1)$ равенство возможно еще тогда, когда все $a_i b_i$ нули и когда не имеет смысла в этом случае суммам $\sum a_i^k$ или $\sum b_i^{k'}$ или обеим вместе приписывать значение, отличное от нуля.

Рассмотрим случай $k>1$. Тогда мы будем иметь неравенство (10) и потому, построив число

$$r_{kk'}=\frac{\sum a_i b_i}{\left(\sum a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum b_i^{h}\right)^{\frac{1}{k'}}},$$

мы будем иметь

$$0 \leqslant r_{kk'} \leqslant 1,$$

причем $r_{kk'}=0$, если $\sum a_i b_i = 0$, но $\sum a_i^k \neq 0$ и $\sum b_i^{k'} \neq 0$, т. е. если не все a_i и не все b_i нули, но все $a_i b_i$ нули, и $r_{kk'}=1$, если мы имеем

$$b_i^{k'} = C a_i^k, \quad i = \overline{1,n},$$

где C — не равное нулю постоянное положительное число.

Будем теперь a_i и b_i истолковывать как наблюденные значения случайных переменных x и y, принимающих положительные значения. Тогда $\sum a_i b_i \neq 0$ и $r_{kk'} > 0$, значение же 1 число $r_{kk'}$ в этом случае может принимать лишь тогда, когда значения $x = a_i$ и $y = b_i$ удовлетворяют равенству

$$y^{k'} = C x^k, \tag{12}$$

или, что все равно, равенству

$$y = C_1 x^{k-1} \tag{12 bis}$$

(C_1 — постоянное положительное число). Отсюда ясно, что число $r_{kk'}$ может служить мерой степенной связанности величин x и y, которая нередко наблюдается в действительных явлениях.

Для случая $0 < k < 1$ мы имеем $r_{kk'} \geqslant 1$, причем равенство возможно лишь тогда, когда a_i и b_i (все положительные) опять удовлетворяют равенствам (12) или (12 bis). Когда $k < 0$, тогда $0 < k' < 1$, и мы возвращаемся к только что рассмотренному случаю, переменив ролями x и y.

Таблица 4

θ	S	θ	S
273	29.4	313	45.8
283	33.3	333	55.2.
288	35.2	353	65.6
293	37.2	373	77.3

Возьмем, например, табл. 4, в которой приведены количества S безводного хлористого аммония (в граммах), способного растворяться в 100 г воды при абсолютной температуре $\theta°$ (данные взяты из книги К. А. Семендяева, Эмпирические формулы, ГТТИ, 1933, стр. 13). Мы имеем здесь по вычислениям К. А. Семендяева

$$S = 0.882 \cdot 10^{-6} \cdot \theta^{3.09},$$

следовательно,

$$k = 4.09; \quad k' = \frac{4.09}{3.09} = 1.323625; \quad \frac{1}{k} = 0.2444989; \quad \frac{1}{k'} = 0.7555010.$$

Затем мы находим

$$\sum \theta S = 123194.0;$$

$$\left(\sum \theta^k\right)^{\frac{1}{k}} = 530.9336,$$

$$\left(\sum S^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} = 232.0418,$$

$$\left(\sum \theta^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum S^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}} = 123198.8,$$

откуда

$$r_{kk'} = \frac{123194.0}{123198.8} = 0.99996.$$

Полученное значение $r_{kk'}$ весьма близко к единице, стало быть, приведенные в табл. 4 значения S и θ действительно находятся в зависимости, весьма близкой к полученной К. А. Семендяевым.

7. Обобщения неравенства Гельдера. К неравенствам Гельд ра примыкают два его обобщения, которые, подобно ему, могут быть использованы в статистике.

Пусть

$$\left.\begin{matrix} a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_n \\ b_1 \; b_2 \; \ldots \; b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_1 \; l_2 \; \ldots \; l_n \end{matrix}\right\} \qquad (13)$$

представляют m рядов неотрицательных чисел и пусть положительные числа $q_1, q_2, \ldots, q_n$ удовлетворяют условию

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1.$$

Тогда мы можем писать ((2), стр. 21):

$$a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_n^{q_n} + b_1^{q_1} b_2^{q_2} \ldots b_n^{q_n} + \ldots + l_1^{q_1} l_2^{q_2} \ldots l_n^{q_n} \leqslant$$
$$\leqslant (a_1 + b_1 + \ldots + l_1)^{q_1} (a_2 + b_2 + \ldots + l_2)^{q_2} \ldots (a_n + b_n + \ldots + l_n)^{q_n}, \qquad (14)$$

причем равенство достигается только тогда, когда каждые две колонны матрицы (13) пропорциональны друг другу или когда в ней будет иметься по крайней мере один столбец, состоящий только из нулей. Последний случай мы не будем рассматривать и будем предполагать, что в каждом столбце матрицы (13) есть числа, отличные от нуля.

Необходимым и достаточным условием пропорциональности колонн матрицы (23) является выполнение равенств

$$a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu = 0, \; a_\mu c_\nu - a_\nu c_\mu = 0, \; \ldots, \; k_\mu l_\nu - k_\nu l_\mu = 0$$

для всех значений μ и ν. Это же условие необходимо и достаточно для пропорциональности строк матрицы (13). Вместе с тем, заменяя в нашей матрице строки на столбцы и вводя m положительных чисел $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, подчиненных опять условию

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1,$$

мы можем написать

$$\sum a^\alpha b^\beta \ldots l^\lambda \leqslant \left(\sum a\right)^\alpha \left(\sum b\right)^\beta \ldots \left(\sum l\right)^\lambda, \qquad (15)$$

причем равенство опять достигается лишь тогда, когда или ряды матрицы (13) пропорциональны друг другу или по крайней мере один из них состоит лишь из нулей (этот случай мы также не будем далее рассматривать).

За числа q_i в первом случае можно взять $\frac{1}{n}$ и тогда мы получим

$$G(a) + G(b) + \ldots + G(l) \leqslant G(a + b + \ldots + l), \qquad (16)$$

обозначая через $G(u)$ среднюю геометрическую величин $u_1, u_2, \ldots, u_n$, т. е. полагая

$$G(u) = (u_1 u_2 \ldots u_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n}$$

(берется вещественное положительное значение корня).

Во втором случае мы можем положить

$$\alpha = \beta = \ldots = \lambda = \frac{1}{m}$$

и тогда (15) даст нам

$$\sum (ab \ldots l)^{\frac{1}{m}} = \left(\sum a \sum b \ldots \sum l\right)^{\frac{1}{m}}. \qquad (17)$$

Практически в статистических исследованиях удобнее пользоваться неравенствами (16) и (17) и мы только их и будем рассматривать. Возьмем неравенство (16). Его можно использовать в двух направлениях — для построения критерия независимости и критерия линейного подобия.

Критерий независимости. Пусть матрица (13) представляет частоты, с которыми наблюдаются некоторые величины или события

$$\mathrm{A, B, \ldots, L}$$

в соединении с величинами или событиями

$$\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n,$$

так что a_1 есть частота совмещения AE_1, b_2 — частота совмещения BE_2 и т. п. A, B, ..., L могут, например, обозначать значения случайной переменной x, а $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$ - значения случайной переменной y. Тогда, построив величину

$$K = \frac{G(a) + G(b) + \ldots + G(l)}{G(a+b+\ldots+l)}, \qquad (18)$$

мы будем иметь

$$0 \leqslant K \leqslant 1,$$

причем $K = 1$ только тогда, когда все столбцы (и, следовательно, все строки) матрицы (13) пропорциональны друг другу, т. е. когда ряды

$$\mathrm{A, B, \ldots, L} \text{ и } \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$$

независимы. Случай $K = 0$ вообще не имеет определенного статистического истолкования, так как он может наступить, например, когда, при $m = n$,

$$a_1 = b_2 = \ldots = l_n = 0.$$

Но если $m = n = 2$, т. е. в случае четверной таблицы распределения вида табл. 5, он указывает на полную сопряженность признаков A и B.

Таблица 5

	B	$\overline{\mathrm{B}}$
A	a	b
$\overline{\mathrm{A}}$	c	d

Для такой таблицы

$$K = \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{\sqrt{(a+c)(b+d)}} \qquad (19)$$

и это K может равняться нулю при условии, что нет пустых строк или столбцов, только

в двух случаях: когда либо $b=c=0$ либо $a=d=0$, т. е. в случае полной положительной или отрицательной сопряженности признаков А и В.

Критерий линейного подобия. Будем теперь в матрице (13) считать

$$a_i, b_i, \ldots, l_i$$

значениями некоторых случайных величин

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L},$$

принимающих лишь неотрицательные значения. Пусть при этом значения

$$a_i, b_i, \ldots, l_i$$

наблюдаются при осуществлении условий $S_i\ (i=\overline{1,n})$. Тогда величину K, определяемую равенством (18), можно рассматривать как критерий линейного подобия величин А, В, ..., L при условиях S_i. Это линейное подобие естественно считать полным, когда $K=1$, и отсутствующим, когда $K=0$. Оно может быть, например, истолковано как более или менее одинаковая реакция величин А, В, ..., L на некоторые изменяющиеся условия S_i качественного или количественного характера.

Укажем на одно из возможных применений величины K как критерия линейного подобия. Пусть в табл. 6 А, В, ..., L представляют некоторые, например, хлопковые районы и

$$a_0, a_1, \ldots, a_n,$$
$$b_0, b_1, \ldots, b_n$$

и т. д. представляют планы заготовок хлопка (столбец T_0) и действительные выполнения плана в моменты $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_n$ по районам А, В и т. д. Составляя коэффициент K для этих данных, мы можем по степени близости его к 1 судить о более или менее равномерном выполнении плана заготовок хлопка и, следовательно, о большей или меньшей организованности заготовок по рассматриваемым районам. В табл. 6 можно, конечно, опустить плановые количества заготовок $a_0, b_0, \ldots, l_0$ и рассматривать лишь $a_i, b_i, \ldots, l_i\ (i=\overline{1,n})$ — количества действительных заготовок, которые могут быть представлены в процентах плана.

Таблица 6

	T_0	T_1	...	T_n
A	a_0	a_1	...	a_n
B	b_0	b_1	...	b_n
...	...	...	...	...
L	l_0	l_1	...	l_n

Возьмем, например, данные о заготовке хлопка по девяти районам Сурхан-Дарьинского округа Узбекской ССР на 18.XI, 28.XI, 11.XII, 21.XII и 26.XII 1937 г., выраженные в процентах плана по этим районам и представленные в табл. 7 (эти данные взяты из газеты «Правда Востока»).

Таблица 7

18.XI	28.XI	11.XII	21.XII	26.XII
93.2	96.9	102.1	105.1	106.7
73.9	76.2	80.0	81.4	82 0
69.1	72.4	77.1	78.9	79.7
91.4	94.0	99.1	101.1	101.8
93.7	97.5	101.9	103.7	104.8
72.0	77.2	81.5	84.5	86.8
69.0	73.5	77.3	79.3	80.1
93.1	96.7	102.0	104.6	105.4
72.4	77.2	81.5	84.5	85.8
727.8	761.6	802.5	823.1	833.1

Беря средние геометрические по строкам, получим

$$G_1=100.67 \qquad G_2=\ 78.64 \qquad G_3=75.33$$
$$G_4=\ 97.39 \qquad G_5=100.23 \qquad G_6=80.22$$
$$G_7=\ 75.73 \qquad G_8=100.25 \qquad G_9=80.13$$

Средняя геометрическая сумм столбцов равна

$$G=(727.8\cdot 761.6\cdot 802.5\cdot 823.1\cdot 833.1)^{\frac{1}{5}}=788.62 .$$

Следовательно,

$$K=\frac{\sum G_i}{G}=\frac{788.59}{788.62}=0.99996.$$

Близость этого числа к 1 показывает равномерную организованность заготовок по районам и их ясную независимость от времени. Этот вывод можно подтвердить, рассматривая темпы заготовок, которые проще всего характеризовать приращениями процента заготовок за рассматриваемые промежутки времени для каждого из районов. Эти приращения даны в табл. 8, которая показывает большое однообразие темпов и для которой

$$K=0.94978$$

подтверждает это однообразие.

Таблица 8

3.7	5.2	3.0	1.6
2.3	3.8	1.4	0.6
3.3	4.7	1.8	0.8
2.6	5.1	2.0	0.7
3.8	4.4	1.8	1.1
5.2	4.3	3.0	2.3
4.5	3.8	2.0	0.8
3.6	5.3	2.6	0.8
4.8	4.3	3.0	1.3
33.8	40.9	20.6	10.0

Для оценки полученных значений K нужно было бы знать среднюю квадратическую погрешность K, но она остается пока неизвестной.

Об использовании неравенства (15) можно повторить все то, что было сказано об использовании неравенства (14).

8. Неравенство Минковского. Неравенство Минковского можно формулировать следующим образом ((2), стр. 30).

Пусть $r \neq 1$ и представляет конечное число. Введем затем обозначение

$$M_r(u) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

и будем опять рассматривать матрицу (13). Тогда неравенство Минковского будет иметь вид

$$M_r(a) + M_r(b) + \ldots + M_r(l) \geqslant M_r(a+b+\ldots+l)$$

для $r > 1$ и

$$M_r(a) + M_r(b) + \ldots + M_r(l) \leqslant M_r(a+b+\ldots+l)$$

для $r < 1$, причем в обоих случаях равенство возможно только тогда, когда строки матрицы (13) пропорциональны или когда $r \leqslant 0$ и

$$a_\nu = b_\nu = \ldots = l_\nu = 0$$

для некоторых ν.

Мы рассмотрим случай $r > 1$ и будем соответственное неравенство писать в следующей, очевидно эквивалентной прежней, форме:

$$\left[\sum (a_i + b_i + \ldots + l_i)^r\right]^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\sum a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \ldots + \left(\sum l_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \qquad (20)$$

Здесь равенство возможно лишь тогда, когда мы можем писать

$$a_i = \alpha t_i, \ b_i = \beta t_i, \ \ldots, \ l_i = \lambda t_i, \ i = \overline{1, n},$$

где α, β, ..., λ — некоторые постоянные числа и t — некоторая вспомогательная переменная, принимающая значения $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Неравенство (20), подобно неравенству Гельдера, можно использовать в двух направлениях: для построения критерия независимости и критерия линейного подобия.

Критерий независимости. Пусть числа матрицы (13) представляют частоты некоторых качественных или количественных признаков A, B, ..., L в соединении с признаками E_1, E_2, ..., E_n — совершенно так же, как выше, когда мы рассматривали неравенство (16). Построим затем число

$$H_r = \frac{\left[\sum (a_i + b_i + \ldots + l_i)^r\right]^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \ldots + \left(\sum l_i^r\right)^{\frac{1}{r}}}, \qquad (21)$$

которое, для $r > 1$, будет удовлетворять неравенствам

$$0 < H_r \leqslant 1.$$

Когда хоть одна из рассматриваемых частот не равна нулю, $H_r \neq 0$. Затем H_r может равняться 1 только тогда, когда строки матрицы (13) пропорциональны друг другу, что соответствует, очевидно, полной независимости признаков A, B, ..., L от признаков E_1, E_2, ..., E_n.

Рассмотрим далее случай, когда $n=m$ и

$$\begin{gathered} a_1 \neq 0, \ a_2=a_3= \ldots =a_m=0 \\ b_2 \neq 0, \ b_1=b_3= \ldots =b_m=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_m \neq 0, \ l_1=l_2= \ldots =l_{m-1}=0 \end{gathered}$$

Тогда

$$H_r=\frac{(a_1^r+b_2^r+\ldots+l_m^r)^{\frac{1}{r}}}{a_1+b_2+\ldots+l_m} \equiv H_r^* .$$

Это значение H_r соответствует полной связи рассматриваемых нами признаков, когда каждый из признаков A, B, ..., L может встретиться только в соединении с одним определенным из признаков E_1, E_2, ..., E_n, и обратно, т. е. когда между обоими рядами признаков существует одно-однозначное соответствие.

Исследуем H_r^*. Пусть

$$a_1+b_2+\ldots+l_m=N;$$

N, очевидно, есть общее число наблюдений. Тогда

$$H_r^*=\frac{1}{N}(a_1^r+b_2^r+\ldots+l_m^r)^{\frac{1}{r}}$$

и достигает, как нетрудно видеть, наименьшего значения для

$$a_1=b_2=\ldots=l_m=\frac{N}{m}.$$

Это наименьшее значение равно

$$\min H_r^*=\frac{m^{\frac{1}{r}}}{m}.$$

Затем можно обнаружить, что наименьшее значение H_r достигается только для тех значений частот матрицы (13), которые мы только что рассмотрели.

Таким образом, мы имеем

$$\frac{m^{\frac{1}{r}}}{m} \leqslant H_r \leqslant 1, \tag{22}$$

причем наименьшее значение H_r достигается только тогда, когда в матрице (13) число строк и столбцов одинаково и равно m и когда в каждом ряду есть только одна частота, отличная от нуля, причем отличные от нуля частоты все одинаковы и встречаются по одной в каждом столбце. Этот случай можно назвать случаем полной одинаковой или равномерной зависимости признаков A, B, ..., L от признаков E_1, E_2, ..., E_n.

Следует отметить, что анализ значения H_r^* критерия H_r привел нас к понятию полной равномерной зависимости двух рядов признаков. Это понятие соответствует не только аналитическому факту — условию, при котором достигается минимум величины H_r, но имеет и реальное статистическое значение: оно отражает тот случай, когда не только существует одно-однозначная сопряженность двух рядов признаков, но

когда, кроме того, сопряженные пары признаков встречаются одинаково часто. Свойство критерия H_r улавливать и этот случай дает ему некоторое преимущество перед коэффициентом сопряженности Пирсона-Чупрова, который этого случая не отличает от случая вообще полной сопряженности.

На практике проще всего брать $r=2$. Тогда, опуская значок 2, можно просто писать

$$H=\frac{\sqrt{\sum (a+b+\ldots+l)^2}}{\sqrt{\sum a^2}+\sqrt{\sum b^2}+\ldots+\sqrt{\sum l^2}}, \tag{23}$$

причем будем иметь неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\leqslant H\leqslant 1 \tag{24}$$

и случай $H=\frac{1}{\sqrt{m}}$ будет соответствовать полной равномерной сопряженности признаков, а случай $H=1$ — их полной независимости.

Критерий линейного подобия. Будем теперь рассматривать случайные переменные $x, y, \ldots, u$, принимающие положительные значения, и пусть

$$a_i,\ b_i,\ \ldots,\ l_i,\ i=\overline{1,n},$$

будут их наблюденными в n испытаниях S_i (или при условиях S_i) значениями. Мы опять можем построить H_r, причем H_r будет равно 1 только тогда, когда $a_i, b_i, \ldots, l_i$ будет удовлетворять уравнениям вида

$$x=\alpha t,\ y=\beta t,\ \ldots,\ u=\lambda t,$$

где t — некоторая вспомогательная переменная и $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ — постоянные числа. Естественно в этом случае величины $x, y, \ldots, u$ называть линейно подобными. Тогда близость H_r (или H) к 1 может служить критерием приближения величин $x, y, \ldots, u$ к линейному подобию, которое может служить признаком одинакового воздействия на наши величины условий S_i.

Так, например, вычисляя H для табл. 7 и 8 заготовок хлопка, мы получим значения

$$H'=0.99996 \text{ и } H''=0.98897$$

соответственно. Они приводят нас к тому же выводу о заготовках и их темпах, которые были получены выше при помощи коэффициента K.

Наименьшее значение H_r (или H) соответствует факту полной специфичности воздействия условий S_i на величины $x, y, \ldots, u$.

Частным случаем линейного подобия является равенство величин $x, y, \ldots, u$ между собой, которое, следовательно, также может испытываться критерием H_r (или H).

Числа H_r и H могут также, в известной мере, заменить коэффициент корреляции, когда они составляются для двух величин и имеют, следовательно, вид

$$H_r=\frac{\left[\sum (a_i+b_i)^r\right]^{\frac{1}{r}}}{\left(\sum a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}}, \qquad H=\frac{\sqrt{\sum (a_i+b_i)^2}}{\sqrt{\sum a_i^2}+\sqrt{\sum b_i^2}}.$$

В этом случае $H_r = H = 1$ только при точной линейной связи величин x и y, принимающих значения a_i и b_i.

Для четверной таблицы

$$H_r = \frac{[(a_1+b_1)^r + (a_2+b_2)^r]^{\frac{1}{r}}}{(a_1^r + a_2^r)^{\frac{1}{r}} + (b_1^r + b_2^r)^{\frac{1}{r}}}$$

и в этом случае $H_r = 1$ свидетельствует, при истолковании величин a_i и b_i как частот некоторых признаков A, B и их отрицаний, о полной независимости A и B, а наименьшее значение H_r, равное теперь $\frac{1}{2}\left(2^{\frac{1}{r}}\right)$, — о их полной положительной или отрицательной сопряженности, так как оно достигается либо при

$$a_1 = b_2 \neq 0 \text{ и } a_2 = b_1 = 0$$

либо при

$$a_2 = b_1 \neq 0 \text{ и } a_1 = b_2 = 0.$$

9. Неравенство Ингхэма. Неравенство Ингхэма (Ingham) представляет видоизменение неравенства Минковского и может быть написано следующим образом (([2]), стр. 31): если

$$0 < r < s < 0; \quad \sum_\mu p_\mu = \sum_\nu q_\nu = 1 \quad (p_\mu > 0,\ q_\nu > 0);$$

$$a_{\mu\nu} \geq 0 \quad (\mu = \overline{1, m};\ \nu = \overline{1, n}),$$

то

$$\left[\sum_\nu q_\nu \left(\sum_\mu p_\mu a_{\mu\nu}^r\right)^{\frac{s}{r}}\right]^{\frac{1}{s}} \leqslant \left[\sum_\mu p_\mu \left(\sum_\nu q_\nu a_{\mu\nu}^s\right)^{\frac{r}{s}}\right]^{\frac{1}{r}}, \tag{25}$$

причем равенство возможно лишь тогда, когда

$$a_{\mu\nu} = b_\mu c_\nu \quad (\mu = \overline{1, m};\ \nu = \overline{1, n}).$$

Наиболее простую форму это неравенство принимает для

$$r = 1,\ s = 2,\ p_\mu = \frac{1}{m},\ q_\nu = \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$\sqrt{\sum_\nu \left(\sum_\mu a_{\mu\nu}\right)^2} \leqslant \sum_\mu \sqrt{\sum_\nu a_{\mu\nu}^2} \tag{26}$$

и оно совпадает с неравенством Минковского для $r = 2$.

Неравенство (25) может быть использовано совершенно так же, как неравенство Минковского, и мы не будем более на нем останавливаться. Заметим только, что оно может быть полезно в том случае, когда величинам $a_{\mu\nu}$ можно приписать веса $p_\mu q_\nu$.

10. Неравенства между средними различных порядков. Пусть, как выше,

$$M_r(a) = \left(\frac{1}{n}\sum a^r\right)^{\frac{1}{r}} \quad (\text{все } a > 0).$$

Тогда для $0 < r < s < \infty$ мы будем иметь

$$M_r(a) \leqslant M_s(a),$$

причем равенство возможно лишь тогда, когда все a равны между собою.

Пусть теперь

$$L = \frac{M_r(a)}{M_s(a)}.$$

Тогда всегда

$$0 < L \leqslant 1,$$

причем $L = 1$ лишь для того случая, когда все a одинаковы. Этим числом L можно воспользоваться в двух направлениях: как критерием равновозможности некоторых событий

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

которые наблюдены с частотами

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

или как критерием постоянства некоторой величины X, принимающей положительные значения

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Равновозможность или постоянство мы будем иметь тогда, когда $L = 1$.

Наиболее простая форма для числа L получается, когда $r = 1$ и $s = 2$. Тогда

$$L = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sum a}{\sqrt{\sum a^2}}$$

и наименьшего возможного значения L достигает для того случая, когда одно из значений a_i отлично от нуля и все остальные равны нулю; оно равно $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Следовательно, более точно, чем было написано выше,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant L \leqslant 1.$$

Случай $L = \frac{1}{\sqrt{n}}$ можно истолковывать как случай крайней неравновозможности рассматриваемых событий или крайнего неравенства рассматриваемых неотрицательных величин.

11. Заключительные замечания. Из огромного запаса аналитических неравенств мы рассмотрели только некоторые, которые проще или известнее других. Множество других неравенств остаются нерассмотренными, но и рассмотренные дали нам ряд новых статистических критериев, которые могут иметь разнообразные и важные применения в статистических исследованиях. Изложенное выше имело целью только иллюстрировать общую мысль, высказанную в самом начале этой статьи, и показать возможность построения новых статистических критериев. Теория этих критериев еще не построена и нужно ее построить, чтобы использование их стало рациональным. Нужно также испытать их практическую применимость и ценность и провести исследование

их относительных качеств, так как они часто применимы к одинаковым проблемам.

Среднеазиатский гос. университет.
Ташкент.

Поступило
16. IV. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

Чупров А. А., Основные проблемы теории корреляции, 1926, стр. 8.
Hardy G. H., Littlewood J. E. and Pólya G., Inequalities, Cambridge University Press, 1934.

V. I. ROMANOVSKY. ANALYTICAL INEQUALITIES AND STATISTICAL TESTS

SUMMARY

Analytical inequalities such as generalised Cauchy's inequality, Hölder's and Minkowski's inequalities and so on are used in this paper for the construction of various statistical tests of independence, of power dependence and of linear similitude.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математически и естественных наук

В. К. ТУРКИН

КВАЗИНОРМАЛИЗАТОРЫ И МОНОМИАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе автор применяет построенный им метод квазинормализаторов для получения нового критерия простоты конечной группы.

§ 1. В работе автора «Über Quasinormalisatoren der Elemente in endlichen Gruppen» (1) введено понятие о квазинормализаторе элемента конечной группы. Пусть A есть элемент порядка p^k (p — простое число) конечной группы $\mathfrak{G}$. Совокупность элементов X той же группы, для которых выполняется равенство

$$XAX^{-1}=A^m, \quad m\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p^i) \quad (i\leqslant k),$$

есть подгруппа группы $\mathfrak{G}$, называемая i-тым квазинормализатором элемента A относительно группы $\mathfrak{G}$ и обозначаемая через $\mathfrak{N}_A^{(i)}$. С помощью понятия о квазинормализаторе автором доказан ряд теорем о конечных группах.

В настоящей работе доказывается следующая теорема:

ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа порядка $p^a n$ (p — нечетное простое число; $p(p-1)$ — взаимно просто с n). Пусть A есть элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$. Если порядок нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ относительно группы $\mathfrak{G}$ не делится на p^{2k}, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель, порядок которого делится на n.*

Для доказательства этой теоремы * приходится комбинировать методы теории квазинормализаторов и методы, основанные на теории мономиальных представлений конечной группы. Исходным пунктом доказательства является следующая теорема, доказанная автором посредством метода мономиальных представлений в работе «Über Herstellung und Anwendungen der monomialen Darstellungen endlicher Gruppen» (2):

Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа и $\mathfrak{H}$ ее подгруппа. Пусть

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}G_2+\mathfrak{H}G_3+\ldots+\mathfrak{H}G_s.$$

Пусть A есть некоторый элемент группы $\mathfrak{G}$. Пусть

$$G_\lambda A=H^{(\lambda)}G_{i_\lambda}$$

* Формулировка этой теоремы приведена автором в предварительном сообщении в Докладах Академии Наук СССР, т. 3 (12), 1936.

($H^{(\lambda)}$ — *элемент подгруппы* $\mathfrak{H}$). *Если произведение*

$$H^{(1)}H^{(2)}\ldots H^{(s)}$$

не содержится в коммутанте подгруппы $\mathfrak{H}$, *то* $\mathfrak{G}$ *имеет нормальный делитель.*

Мы будем пользоваться в дальнейшем следующим обозначением. Пусть $\mathfrak{H}$ есть попрежнему подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и пусть $\mathfrak{A}$ есть другая подгруппа группы $\mathfrak{G}$, заключающая в себе $\mathfrak{H}$. Пусть

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}\Gamma_2+\mathfrak{H}\Gamma_3+\ldots+\mathfrak{H}\Gamma_\sigma.$$

Пусть

$$\Gamma_\lambda A=\overline{H}^{(\lambda)}G_{j_\lambda}$$

($\overline{H}^{(\lambda)}$ есть элемент подгруппы $\mathfrak{H}$). Мы будем обозначать произведение

$$\overline{H}^{(1)}\overline{H}^{(2)}\ldots\overline{H}^{(\sigma)}$$

через

$$\Pi(\mathfrak{A}, A).$$

Во всем дальнейшем изложении $\mathfrak{G}$ есть группа порядка $p^\alpha n$ (p—нечетное простое число; $p(p-1)$ — взаимно просто с n), A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ — циклическая подгруппа, порожденная элементом A.

Далее, мы будем обозначать через λ_i наибольшее значение числа λ, при котором

$$\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}}=\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^i}}.$$

Очевидно

$$\lambda_i\leqslant\lambda_{i-1}.$$

Далее очевидно, что

$$\lambda_i\leqslant k-i.$$

§ 2. ЛЕММА I. *Пусть* v *есть отношение порядков групп* $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ *и* $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$. *Тогда*

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}, A)=[\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}, A)]^v.$$

Примечание. Если $\lambda_i=k-i$, то полагаем, что $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}=\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^{i+1}}}$.

Докажем эту лемму. Заметим, прежде всего, что выражения $\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}, A)$ и $\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}, A)$ имеют смысл, так как подгруппа $\mathfrak{H}$ (циклическая подгруппа, порожденная элементом A) содержится во всех квазинормализаторах $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}}$. Мы можем считать, что $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}\neq\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$, так как случай $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}=\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ тривиален.

Пусть

$$\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}N_2+\mathfrak{H}N_3+\ldots+\mathfrak{H}N_\varphi$$

и пусть N' есть некоторый элемент квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$. Пусть

$$N'A^{p^{i+1}}N'^{-1}=(A^{p^{i+1}})^{1+jp^{\lambda_i}},$$

где j — одно из чисел последовательности $0, 1, 2, \ldots, p^{k-i-\lambda_i-1}-1$, если $k-i-\lambda_i-1>0$, и $j=0$, если $k-i-\lambda_i-1=0$ или $k-i-\lambda_i-1=-1$ ($k-i-\lambda_i-1<-1$ невозможно).

В квазинормализаторе $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$ можно найти такой элемент Y, что

$$YA^{p^i}Y^{-1}=(A^{p^i})^{\rho},$$

где ρ — число, удовлетворяющее сравнению

$$(1+jp^{\lambda_i})\rho\equiv 1 \pmod{p^{k-i}}.$$

Действительно, квазинормализаторы

$$\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}},\ \mathfrak{N}^{(\lambda_i+1)}_{A^{p^i}},\ \ldots,\ \mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}}$$

все различны и, следовательно, индекс подгруппы $\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}}$ относительно группы $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$ равен $p^{k-i-\lambda_i}$ (1). Следовательно, если разложить группу $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$ по модулю $\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}}$, то каждая смежная система этого разложения будет состоять из элементов X, для которых

$$XA^{p^i}X^{-1}=(A^{p^i})^m,\quad m\equiv 1+z_1p^{\lambda_i}+z_2p^{\lambda_i+1}+\ldots+$$
$$+z_{k-i-\lambda_i}p^{k-i-1} \pmod{p^{k-i}},$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_{k-i-\lambda_i}$ — некоторые определенные числа из последовательности $0, 1, 2, \ldots, p-1$. Обратно, для каждой системы чисел $z_1, z_2, \ldots, z_{k-i-\lambda_i}$ из последовательности $0, 1, 2, \ldots, p-1$ можно найти такую смежную систему разложения группы $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$ по модулю $\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}}$, что для элементов X, входящих в эту смежную систему, выполняется условие

$$XA^{p^i}X^{-1}=(A^{p^i})^m,\quad m\equiv 1+z_1p^{\lambda_i}+z_2p^{\lambda_i+1}+\ldots+$$
$$+z_{k-i-\lambda_i}p^{k-i-1} \pmod{p^{k-i}}.$$

В частности, можно найти такую смежную систему, что для элементов X этой системы будет выполняться условие

$$XA^{p^i}X^{-1}=(A^{p^i})^{\rho}$$

(сравнение $(1+jp^{\lambda_i})\rho\equiv 1 \pmod{p^{k-i}}$ всегда имеет решение ρ, причем $\rho\equiv 1 \pmod{p^{\lambda_i}}$).

Итак, пусть Y есть элемент квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$, для которого

$$YA^{p^i}Y^{-1}=(A^{p^i})^{\rho},\quad (1+jp^{\lambda_i})\rho\equiv 1 \pmod{p^{k-i}}.$$

Обозначим произведение YN' через N''. Тогда

$$N''A^{p^{i+1}}N''^{-1}=Y(A^{p^{i+1}})^{1+jp^{\lambda_i}}Y^{-1}=(A^{p^{i+1}})^{(1+jp^{\lambda_i})\rho}=A^{p^{i+1}}.$$

Рассмотрим следующую таблицу, составленную из смежных систем:

$\mathfrak{H}N''$	$\mathfrak{H}N_2N''$	$\ldots$	$\mathfrak{H}N_{\varphi}N''$
$\mathfrak{H}N''A$	$\mathfrak{H}N_2N''A$	$\ldots$	$\mathfrak{H}N_{\varphi}N''A$
$\mathfrak{H}N''A^2$	$\mathfrak{H}N_2N''A^2$	$\ldots$	$\mathfrak{H}N_{\varphi}N''A^2$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\mathfrak{H}N''A^{p^{i+1}-1}$	$\mathfrak{H}N_2N''A^{p^{i+1}-1}$	$\ldots$	$\mathfrak{H}N_{\varphi}N''A^{p^{i+1}-1}$.

Пусть

$$\mathfrak{H}N_r, \mathfrak{H}N_rA, \mathfrak{H}N_rA^2, \ldots, \mathfrak{H}N_rA^{p^{\delta_r}-1} \quad (\delta_r \leqslant i)$$

есть последовательность смежных систем, переходящих друг в друга циклически при умножении (справа) на A, и пусть

$$N_rA^{p^{\delta_r}}N_r^{-1} = (A^{p^{\delta_r}})^{u_r}.$$

Переходим к вычислению выражений $\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}, A)$ и $\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}, A)$. Для того чтобы вычислить выражение $\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}, A)$, положим в написанной выше таблице $N''=1$. Тогда смежные системы, входящие в таблицу, будут являться смежными системами разложения квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$ по модулю $\mathfrak{H}$; при этом каждая смежная система будет входить в таблицу p^{i+1} раз.

При умножении (справа) на A элемент N_rA^x ($x \neq \mu p^{\delta_r}-1$, где $\mu = 1, 2, 3, \ldots, p^{i+1-\delta_r}$) переходит в элемент N_rA^{x+1}. Элемент же $N_rA^{\mu p^{\delta_r}-1}$ при умножении (справа) на A переходит в элемент

$$N_rA^{\mu p^{\delta_r}} = N_rA^{p^{\delta_r}}N_r^{-1}N_rA^{(\mu-1)p^{\delta_r}} = A^{p^{\delta_r}u_r}N_rA^{(\mu-1)p^{\delta_r}}.$$

Мы получаем, следовательно,

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}, A) = A^{\frac{1}{p^{i+1}}\sum\limits_{r=1}^{\varphi} p^{i+1-\delta_r}\, p^{\delta_r}u_r} = A^{\sum\limits_{r=1}^{\varphi} u_r}.$$

Вычислим теперь выражение $\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}, A)$. Пусть

$$1,\ N'_2, N'_3, \ldots, N'_v$$

есть полная система вычетов группы $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ по модулю $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$. Для каждого элемента N'_j мы можем найти такой элемент Y_j группы $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$, что элемент $N''_j = Y_jN'_j$ будет перестановочен с элементом $A^{p^{i+1}}$ (см. выше). Элементы

$$1, N''_2, N''_3, \ldots, N''_v$$

очевидно также представляют собой полную систему вычетов группы $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ по модулю $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$. Будем подставлять в написанную выше таблицу вместо N'' все элементы N''_j. В полученных таким образом v таблицах будут содержаться все смежные системы разложения группы $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ по модулю $\mathfrak{H}$; при этом каждая из этих смежных систем будет встречаться p^{i+1} раз. При умножении (справа) на A элемент $N_rN''_jA^x$ ($j \neq 1$; $x \neq p^{i+1}-1$) переходит в элемент $N_rN''_jA^{x+1}$, а для элемента $N_rN''_jA^{p^{i+1}-1}$ ($j \neq 1$) имеем:

$$N_rN''_jA^{p^{i+1}-1}A = N_rN''_jA^{p^{i+1}} = N_rA^{p^{i+1}}N''_j = N_rA^{p^{i+1}}N_r^{-1}N_rN''_j = (A^{p^{i+1}})^{u_r}N_rN''_j.$$

Мы получаем:

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}, A) = A^{\sum\limits_{r=1}^{\varphi} u_r}\, A^{\frac{1}{p^{i+1}}p^{i+1}\sum\limits_{r=1}^{\varphi} u_r(v-1)} = A^{v\sum\limits_{r=1}^{\varphi} u_r}.$$

Мы получили таким образом, что

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}, A) = [\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}, A)]^v.$$

Лемма I доказана.

§ 3. ЛЕММА II. *Если* $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}} \neq \mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}$ *и* $\lambda \leqslant \lambda_{i-1}$, *то*

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}, A) = [\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}}, A)]^\sigma,$$

где $\sigma \equiv p \pmod{p^2}$.

Докажем эту лемму. Пусть $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}} \neq \mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}$. Тогда ([1]) $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}}$ есть подгруппа индекса p группы $\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}$. Если M есть элемент группы $\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}$, не содержащийся в $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}}$, то

$$1, M, M^2, \ldots, M^{p-1}$$

есть полная система вычетов группы $\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}$ по модулю $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}}$. Очевидно,

$$\mathfrak{H}M, \mathfrak{H}MA, \mathfrak{H}MA^2, \ldots, \mathfrak{H}MA^{p^i-1}$$

есть последовательность смежных систем, переходящих друг в друга циклически при умножении (справа) на A (по условиям нашей леммы $\lambda \leqslant \lambda_{i-1}$, а следовательно, $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^j}} = \mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^j}}$ при $j < i$).

Пусть

$$MA^{p^i}M^{-1} = (A^{p^i})^w.$$

Составим таблицу:

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{H}M^\varepsilon & \mathfrak{H}N_2M^\varepsilon & \ldots & \mathfrak{H}N_\varphi M^\varepsilon \\
\mathfrak{H}M^\varepsilon A & \mathfrak{H}N_2M^\varepsilon A & \ldots & \mathfrak{H}N_\varphi M^\varepsilon A \\
\mathfrak{H}M^\varepsilon A^2 & \mathfrak{H}N_2M^\varepsilon A^2 & \ldots & \mathfrak{H}N_\varphi M^\varepsilon A^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\mathfrak{H}M^\varepsilon A^{p^i-1} & \mathfrak{H}N_2M^\varepsilon A^{p^i-1} & \ldots & \mathfrak{H}N_\varphi M^\varepsilon A^{p^i-1}.
\end{array}$$

Напишем такие таблицы для $\varepsilon = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. В этих таблицах будут содержаться все смежные системы разложения группы $\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}$ по модулю $\mathfrak{H}$; при этом каждая из этих смежных систем будет встречаться p^i раз. При умножении (справа) на A элемент $N_rM^\varepsilon A^x$ ($\varepsilon \neq 0$; $x \neq p^i-1$) переходит в элемент $N_rM^\varepsilon A^{x+1}$, а для элемента $N_rM^\varepsilon A^{p^i-1}$ ($\varepsilon \neq 0$) имеем:

$$N_rM^\varepsilon A^{p^i-1}A = N_rM^\varepsilon A^{p^i} = N_rM^\varepsilon A^{p^i}M^{-\varepsilon}M^\varepsilon = N_rA^{p^iw^\varepsilon}M^\varepsilon =$$
$$= N_rA^{p^iw^\varepsilon}N_r^{-1}N_rM^\varepsilon = A^{p^iu_rw^\varepsilon}N_rM^\varepsilon.$$

Мы получаем:

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}, A) = A^{\sum\limits_{r=1}^{\varphi} u_r} \cdot A^{\frac{1}{p^i}p^i(w+w^2+w^3+\ldots+w^{p-1})\sum\limits_{r=1}^{\varphi} u_r} = A^{\frac{w^p-1}{w-1}\sum\limits_{r=1}^{\varphi} u_r}.$$

Очевидно,

$$w \equiv 1 \pmod{p^{\lambda-1}},$$

т. е.

$$w = 1 + \mu p^{\lambda-1}$$

(μ — целое число). Отсюда

$$w^p = (1 + \mu p^{\lambda-1})^p \equiv 1 + \mu p^\lambda \pmod{\mu p^{\lambda+1}}$$

(по условиям леммы II $\lambda - 1 \geqslant 1$, т. е. $\lambda \geqslant 2$). Следовательно,

$$\frac{w^p - 1}{w - 1} \equiv p \pmod{p^2}$$

и

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}, A) = [\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}}, A)]^\sigma,$$

где $\sigma \equiv p \pmod{p^2}$. Лемма II доказана.

Заметим, что лемма II справедлива и при $i = 0$, условие $\lambda \leqslant \lambda_{i-1}$ в этом случае теряет смысл и должно быть отброшено.

§ 4. Переходим к доказательству нашей теоремы. Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа порядка $p^\alpha n$ (p — нечетное простое число; $p(p-1)$ — взаимно просто с n). Пусть A есть элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ и пусть $\mathfrak{H}$ есть циклическая подгруппа, порожденная элементом A. Для того чтобы группа $\mathfrak{G}$ могла быть простой, необходимо чтобы произведение

$$H^{(1)}H^{(2)}\ldots H^{(s)}$$

(см. § 1) входило в коммутант подгруппы $\mathfrak{H}$. В рассматриваемом нами случае $\mathfrak{H}$ — абелева группа; следовательно, коммутант $\mathfrak{H}$ равен 1.

Нетрудно видеть, что

$$H^{(1)}H^{(2)}\ldots H^{(s)} = \Pi(\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-1}}}, A).$$

Действительно, если некоторая смежная система $\mathfrak{H}G_\lambda$ не содержится в квазинормализаторе $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-1}}}$, то она должна входить в некоторую последовательность смежных систем

$$\mathfrak{H}G_\lambda, \ \mathfrak{H}G_{\lambda+1}, \ \mathfrak{H}G_{\lambda+2}, \ldots, \mathfrak{H}G_{\lambda+p^k-1},$$

переходящих друг в друга циклически при умножении (справа) на A. Мы можем положить

$$G_{\lambda+i} = G_{\lambda+i-1}A \quad (1 \leqslant i \leqslant p^k - 1).$$

Тогда $H^{(\lambda+i)} = 1$ $(0 \leqslant i \leqslant p^k - 2)$. Но тогда

$$G_{\lambda+p^k-1}A = G_\lambda A^{p^k} = G_\lambda,$$

т. е. и $H^{(\lambda+p^k-1)} = 1$. Итак, группа $\mathfrak{G}$ может быть простой только в случае

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-1}}}, A) = 1.$$

Вычислим, прежде всего,

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(k)}_A, A).$$

Пусть $\mathfrak{H}G_\lambda$ есть одна из смежных систем, входящих в $\mathfrak{N}^{(k)}_A$. Очевидно,

$$G_\lambda A = AG_\lambda,$$

т. е. $H^{(\lambda)}=A$. Мы получаем, таким образом, что

$$\Pi(\mathfrak{N}_A^{(k)}, A)=A^z,$$

где z есть отношение порядков групп $\mathfrak{N}_A^{(k)}$ и $\mathfrak{H}$. Пусть $z=p^\zeta v$, где v не делится на p.

Рассмотрим следующую последовательность квазинормализаторов: $\mathfrak{N}_A^{(k)}, \mathfrak{N}_A^{(k-1)}, \ldots, \mathfrak{N}_A^{(\lambda_0)}$,

$$\mathfrak{N}_{A^p}^{(\lambda_0)}, \mathfrak{N}_{A^p}^{(\lambda_0-1)}, \ldots, \mathfrak{N}_{A^p}^{(\lambda_1)},$$

$$\mathfrak{N}_{A^{p^2}}^{(\lambda_1)}, \mathfrak{N}_{A^{p^2}}^{(\lambda_1-1)}, \ldots, \mathfrak{N}_{A^{p^2}}^{(\lambda_2)},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{N}_{A^{p^{k-1}}}^{(1)}.$$

Пусть $\overline{\mathfrak{N}}$ и $\overline{\overline{\mathfrak{N}}}$ два последовательные (слева направо или сверху вниз) члена этой последовательности и τ — отношение их порядков. Пусть $\tau=p^\nu\chi$, где χ не делится на p (ν может быть не равно 1 только в случае, если переход совершается сверху вниз). На основании лемм I и II

$$\Pi(\overline{\overline{\mathfrak{N}}}, A)=[\Pi(\overline{\mathfrak{N}}, A)]^\sigma,$$

где $\sigma\equiv 0 \pmod{p^\nu} \not\equiv 0 \pmod{p^{\nu+1}}$. Отсюда получаем, что если отношение порядков групп $\mathfrak{N}_{A^{p^{k-1}}}^{(1)}$ и $\mathfrak{N}_A^{(k)}$ равно $p^\omega\psi$, где ψ не делится на p, то

$$\Pi(\mathfrak{N}_{A^{p^{k-1}}}^{(1)}, A)=[\Pi(\mathfrak{N}_A^{(k)}, A)]^\xi,$$

где $\xi\equiv 0 \pmod{p^\omega} \not\equiv 0 \pmod{p^{\omega+1}}$. Следовательно,

$$\Pi(\mathfrak{N}_{A^{p^{k-1}}}^{(1)}, A)=A^{\xi z}.$$

Группа $\mathfrak{G}$ может быть простой только в том случае, если ξz делится на p^k, т. е. если $\zeta+\omega\geqslant k$. В этом случае отношение порядков групп $\mathfrak{N}_{A^{p^{k-1}}}^{(1)}$ и $\mathfrak{H}$ делится на p^k. Но порядок группы $\mathfrak{H}$ равен p^k. Следовательно, группа $\mathfrak{G}$ может быть простой только в том случае, если порядок квазинормализатора $\mathfrak{N}_{A^{p^{k-1}}}^{(1)}$, являющегося нормализатором элемента $A^{p^{k-1}}$, делится на p^{2k}. Наша теорема доказана.

Научно-исслед. институт математики
Московского гос. университета.

Поступило
1. IV. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Turkin W. K., Über Quasinormalisatoren der Elemente in endlichen Gruppen, Математический сборник, т. 2 (44): 5, 1937.

[2] Turkin W. K., Über Herstellung und Anwendungen der monomialen Darstellungen endlicher Gruppen, Mathematische Annalen, B. 111, 1935.

W. K. TURKIN. QUASI-NORMALIZATORS AND MONOMIAL REPRESENTATIONS

SUMMARY

In the present paper the author finds a new criterion for a finite group to be simple by using his method of quasi-normalizators (1).

Let $\mathfrak{G}$ be a group of finite order and A an element of it of order p^k, where p is a prime. Let $\mathfrak{H} = \{A\}$ be the cyclic subgroup of $\mathfrak{G}$ formed by the element A and its powers. Finally, let $\mathfrak{A}$ be a subgroup of $\mathfrak{G}$ containing $\mathfrak{H}$ and let

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}\Gamma_2 + \mathfrak{H}\Gamma_3 + \ldots + \mathfrak{H}\Gamma_\sigma.$$

We denote by $\Pi(\mathfrak{A}, A)$ the product

$$\overline{H}^{(1)}\overline{H}^{(2)}\ldots\overline{H}^{(\sigma)},$$

where $H^{(\lambda)}$ is the element of the subgroup $\mathfrak{H}$ determined by the equation

$$\Gamma_\lambda A = \overline{H}^{(\lambda)}\Gamma_{i_\lambda}.$$

If p is an odd prime and the order of the group $\mathfrak{G}$ is prime to $p-1$ (f. i., if the order of $\mathfrak{G}$ is an odd integer and p is the least prime factor of this order), the group $\mathfrak{G}$ has an invariant subgroup, when

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-1}}}, A) \neq 1$$

($\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-1}}}$ is the normalizator of the element $A^{p^{k-1}}$ with respect to the group $\mathfrak{G}$). In order to estimate the expression $\Pi(\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-1}}}, A)$ the following lemmas are proved:

LEMMA I. *If v is the quotient of the orders of the groups $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ and $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$,*

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}, A) = [\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}, A)]^v,$$

λ_i being the greatest value of λ for which

$$\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}} = \mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^i}}.$$

LEMMA II. *If $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}} \neq \mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}$ and $\lambda \leq \lambda_{i-1}$,*

$$\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}, A) = [\Pi(\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}}, A)]^\sigma,$$

where $\sigma \equiv p \pmod{p^2}$.

Using these lemmas the author proves the following

THEOREM. *Let $\mathfrak{G}$ be a group of order $p^\alpha n$ (p is an odd prime and $p(p-1)$ is prime to n). Let A be an element of $\mathfrak{G}$ of order p^k. If the order of the normalizator of the element $A^{p^{k-1}}$ with respect to the group $\mathfrak{G}$ is not divisible by p^{2k}, the group $\mathfrak{G}$ has an invariant subgroup, whose order is divisible by n.*

ТАБЛИЦЫ ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ С. А. ХОРОШЕГО

Самуил Айзикович Хороший представил в Математический институт Академии Наук СССР составленные им таблицы для нахождения простых делителей чисел, не превосходящих 1 000 000. С помощью этих таблиц можно сразу найти каноническое разложение любого числа до 1 000 000, если оно не имеет однозначных или двузначных простых делителей. Если же данное число имеет несколько однозначных или двузначных делителей, отличных от 2 и 5, то таблицы дают возможность сразу найти все различные простые делители, не превосходящие 100. Поэтому, если в каноническом разложении данного числа, не делящегося на 2 и 5, высший показатель, с которым встречаются однозначные или двузначные простые делители, есть k, то каноническое разложение такого числа по таблицам С. А. Хорошего получается при помощи $k+1$ приискания. Таким образом, таблицы С. А. Хорошего имеют известное преимущество по сравнению с существующими таблицами для разложения чисел на простые делители (доведенными до 10 017 000), где для каждого числа дается его наименьший простой делитель.

При составлении своих таблиц С. А. Хороший основывался на том простом факте, что если число разложить в сумму двух слагаемых, найти наименьший положительный вычет первого слагаемого по модулю p и наименьший отрицательный вычет второго слагаемого по тому же модулю, то число делится или не делится на p, смотря по тому, равны или не равны найденные вычеты.

В конце своих таблиц С. А. Хороший приложил дополнение, дающее возможность находить простые делители, не превосходящие 100 для всех чисел, не превосходящих 10^{12}.

Математический институт Академии Наук приобрел рукопись таблиц С. А. Хорошего и передал ее для хранения в библиотеку Института.

С. А. Хороший, родившийся в 1874 г., имеет низшее образование. До 1935 г. он работал в Москве, в газетном киоске.

Содержание

Sommaire

Адрес редакции: Москва, Б. Калужская, 67, тел. В 3-47-38.
Adresse de la rédaction: B. Kaloujskaya, 67, Moscou.

Статьи направляются в редакцию непосредственно или через действительных членов Академии Наук СССР.

Редактор серии **В. А. Толстиков** Техредактор **Е. Шнобель**

Сдано в набор 5/VII 1938 г. Подписано к печати 11/IX 1938 г.
Формат 70×108 см. 45 800 тип. зн. в печ. л. АНИ № 764
Уполн. Главлита Б-49654. $5^1/_2$ печ. л. Тираж 2600 экз. Заказ 1039

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., 9.